

ПЕДАГОШКА СТВАРНОСТ

ЧАСОПИС ЗА ШКОЛСКА И КУЛТУРНО-ПРОСВЕТНА ПИТАЊА

ПС Год. LV Бр. 9–10 Стр. 861–1044 Нови Сад 2009.
UDK 37 ISSN 0553-4569

САДРЖАЈ

Страна

Др Жељко Калуђеровић: Хераклитова ватра -----	865
ПОГЛЕДИ И МИШЉЕЊА	
Др Зоран Аврамовић, Миља Вујачић: Однос наставника према даровитим ученицима -----	878
Виолета Петковић: Пут ка иновативном наставнику у основној школи -----	890
ДИДАКТИКА И МЕТОДИКЕ	
Др Драгослав Херцег, др Ђорђе Херцег: Интерполација и Geogebra -----	897
Мр Еуген Љајко, Златка Павличић, Ивана Радуловић: Geogebra у срењошколској настави аналитичке геометрије -----	909
Мр Антон Врдољак, др Милорад Бањанин: Образовни потенцијал програма за динамичку математику: случај Geogebra -----	921
Мр Наталија Будимски: Оригами – пример за примену у настави математике -----	932
Др Зорана Лужанин: Један поглед на квалитет универзитетске наставе -----	944
Др Миодраг Милићевић, мр Драгана Тодорић-Вукашин: Примена мултимедијалних алата у образовању -----	955
Мр Бранко Прентовић, др Драгослав Херцег: Анализа опште квадратне једначине применом рачунара -----	962
Светлана Малетин, Милош Рацковић: Рачунарске науке у основној и средњој школи у свету и код нас -----	978
Др Ђорђе Херцег: Џојстик у настави -----	991
Ђурђица Такач, Јасминка Радовановић: О визуелизацији изворне функције ---	1000
Др Љиљана Петковић, др Миодраг Петковић: О погрешним називима познатих математичких резултата -----	1007
Др Валерија Пинтер Крекић: Метода покушаја и погрешака у почетној настави математике -----	1018
ОЦЕНЕ И ПРИКАЗИ	
Академик Босиљка Ђорђевић: Методолошки проблеми истраживања даровитости -----	1026
Љиљана Грујић: Како родитељи могу дисциплиновати своје дете а да не употребе батину -----	1034
Садржај часописа „Педагошка стварност“ за 2009. годину -----	1037

CONTENTS

Željko Kaluđerović, Ph. D.: Heraclitus Fire -----	865
VIEWS AND OPINIONS	
Zoran Avramović, Ph. D., Milja Vujačić: Teacher's Attitude Toward Gifted Students -----	878
Violeta Petković: Towards Innovative Teacher in Primary School -----	890
DIDACTICS AND METHODICS	
Dragoslav Harceg, Ph. D., Đorđe Herceg, Ph. D.: Interpolation and GeoGebra --	897
Eugen Ljajko, M. A., Zlata Pavličić, Ivana Radulović: GeoGebra in Teaching Analytical Geometry for Secondary School Pupils -----	909
Anton Vrdoljak, M. A., Miroslav Banjanin, Ph. D.: Educational Potential of the Curriculum for Dynamic Mathematics: GeoGebra Case -----	921
Natalija Budimski, M. A.: Origami – An Example for Application in Teaching Mathematics -----	932
Zoran Lužanin, Ph. D.: A View on the Quality of University Teaching -----	944
Miodrag Miličević, Ph. D.: Dragana Todorović-Vukašin, M. A.: Application of Multimedia Tools in Education -----	955
Branko Prentović, M. A., Dragoslav Herceg, Ph. D.: Analysis of General Quadratic Equation -----	962
Svetlana Maletin, Miloš Racković: Computer Science in Primary and Secondary School in Our Country and Worldwide -----	978
Đorđe Herceg, Ph. D.: Joystick in Teaching Activity -----	991
Đurđica Takač, Jasminka Radovanović: Visualising Derivative of a Function ---	1000
Ljiljana Petković, Ph. D., Miodrag Petković, Ph. D.: About Wrong Names of Renown Mathematical Results -----	1007
Valerija Pinter-Krekić, Ph. D.: Methodology of “Trial and Error” in Early Teaching Mathematics -----	1018
REVIEW	
Academician Bosiljka Đorđević: Methodological Problems of Researching Giftedness -----	1026
Ljiljana Grujić: Parents Could Discipline Their Child Without Spanking -----	1034
Contents of the Journal “Pedagogical Reality” for 2009 -----	1037

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р Желько Калуджерович: Огонь Гераклита -----	865
ВЗГЛЯДЫ И МНЕНИЯ	
Д-р Зоран Аврамович, Миля Вуячич: Отношение учителей к одарённым ученикам -----	878
Виолета Петкович: Дорога к новаторскому учителю в начальной школе -----	890
ДИДАКТИКА И МЕТОДИКА	
Д-р Драгослав Герцег, д-р Джордже Герцег: Интерполяция и GeoGebra -----	897
М-р Зуген Ляйко, Златка Павличич, Ивана Радулович: GeoGebra в процессе обучения аналитической геометрии в средних школах -----	909
М-р Антон Врдоляк, д-р Милорад Банянин: Образовательные возможности программы для динамической математики: случай GeoGebra -----	921
М-р Надалия Будински: Оригами техника – пример для применения в процессе обучения математики -----	932
Д-р Зорана Лужанин: Один взгляд на качество процесса обучения в университете -----	944
Д-р Миорад Милчевич, м-р Драган Тодорич-Букашин: Применение мультимедиаьных инструментов в образовании -----	955
М-р Бранко Прентович, д-р Драгослав Герцег: Анализ общего квадратного уравнения с помощью компьютера -----	962
Светлана Малетин, Милош Рацкович: Компьютерные науки в начальной и в средней школе в мире и у нас -----	978
Д-р Джордже Герцег: Джойстик в процессе обучения -----	991
Джурджица Такачи, Ясминка Радованович: О визуализации производной функции -----	1000
Д-р Лиляна Петкович, д-р Миодраг Петкович: Об ошибочных названиях известных математических результатов -----	1007
Д-р Валерия Пинтер Крекич: Метод попыток и ошибок в начальном процессе обучения математики -----	1018
ОЦЕНКИ И ОБЗОРЫ	
Академик Босилька Джорджевич: Методологические проблемы в исследовании одарённости -----	1026
Лиляна Груич: Кака родители могут дисциплинировать своих детей без палки -----	1034
Содержание журнала „Педагогическая действительность“ за 2009 год -----	1037

Др Жељко Калуђеровић
Филозофски факултет
Нови Сад

UDK 14 ХЕРАКЛИТ
UDK 14 АРИСТОТЕЛ
UDK 113/119

Оригинални научни рад
Примљен: 21. XII 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 865–877.

ХЕРАКЛИТОВА ВАТРА

Резиме

Аутор у раду анализира Аристотелово виђење Хераклитове филозофије, која је посматрана кроз призму Стагиранинове четвороврсне каузалне схематике. Аристотел је, по мишљењу аутора, снажно аргументовао и доследно бранио властиту тезу да је Хераклит био типични представник јонске филозофије природе. Овакав свој став Стагиранин није заступао само на основу места рођења Хераклита, него га је фундирао имајући примарно у виду Ефежаниново постулирање основног бивства. Аристотел је, наиме, након проучавања Хераклитових фрагмената закључио да је ватра перзистентни супстрат свега и да она треба да буде третирана као arche и physis у милетском смислу речи. Код Хераклита је, коначно, следећи Аристотела, било речи о једном начелу, ватри, које је „тварног облика” и које је у Стагираниновој типологији узрока било сврстано у категорију материјалног узрока.

Кључне речи: Хераклит, филозоф природе, ватра, arche, physis, начело, „тварни облик”, материјални узрок

Први истински филозоф, како по свом дијалектичком изричају тако и по својој необичајеној појмовној артикулацији, био је Хераклит.¹ Ако филозофија настаје из систематске и континуиране праксе мишљења, са језиком који треба, колико год је могуће, да се разликује од поетског и тзв. обичног говора, онда понајбољи представник такве тенденције у дотадашњој историји филозофије свакако јесте Хераклит. Да ли због специфичне појмовне апаратуре или због особеног спекулативног израза апофтегматичног мислиоца из Ефеса, више него његови претходници, али

¹ Хегел, који је био изванредан познавалац античких мисаоних парадигми, то каже на следећи начин: „Дакле, код Хераклита се први пут може наћи филозофска идеја у њеној спекулативној форми”. Г. В. Ф. Хегел, *Историја филозофије I*, БИГЗ, Београд 1975, стр. 241.

и више него његови пресократски потомци, Хераклитови фрагменти били су предмет расправа и веома различитог интерпретирања у потоњој традицији.² Тумачења већине од 131 сачуваног фрагмента (по Дилс-Кранцовой нумерацији) крећу се у тако широким потезима да их је немогуће сублимирати у једном кратком приказу чак ни по типовима, а камоли навести све појединачне приступе.³ Предмет разматрања у овом раду на срећу неће бити анализа широког спектра постојећих коментара Хераклитових белешки,⁴ већ Аристотелов интерпретацијски приступ овом мислиоцу посматран кроз призму његове четвороврсне каузалне схематике.

Да би се разматрали сегменти из Аристотелових списа који се тичу Хераклита, а који имају везе са његовом доктрином о узроцима, треба најпре скицирати оквир у коме ће се истраживање кретати, који ће бити и оријентир за навођење Стагиранинових цитата. Ефежанинов „метафизички систем” карактеришу три главна става:

² Хераклит као да и након два и по миленијума оправдава епитете који су му приписани од стране Тимона *αἰνιτικός* („загонетан”, ДЛ, IX, 6), и у псеудоаристотеловском спису *Ο κοσμος, ὁ σκοτεινός* („онај мрачни”, 396620). Хераклитове тешко прозирне мисли представљале су проблем и за једног Аристотела. Илустрација ове тврдње може се пронаћи у *Реторици* 1407b16–18, где Стагираинин, истина, наводи да је неразумевање Ефежанина резултат тзв. спољашњих разлога, тј. одсуства знакова интерпункције. Дилема која се на поменутом месту у *Реторици* јавља ипак није формалне природе. Ту се, наиме, цитира почетак првог Хераклитовог фрагмента и поставља питање да ли *ἀεὶ* („унавек”) иде са (*δεόντος* „јесте”) или евентуално са *ἄξιονετο* („не разумеју”), што у коначном радикално мења разумевање дотичног пасажа. Место зареза у реченици, у ствари, одређује да ли ће *λογος* бити вечан, у првој верзији, или је на делу вечно неразумевање истог – у другој верзији. Уосталом, ево како гласе те две реченице (*Rhet.* 1407b16–18):

Због овога разлога који постоји увијек људи бивају неразумни. Овоје није јасно где зарезом треба припојити прилог увијек.

“τοῦ λόγου τοῦ δεόντος ἀεὶ ἄξιονετο ἄνθρωποι γίγνονται.” ἄδηλον γὰρ τὸ ἀεὶ, πρὸς ὁποτέρω διαστίξαι.

Прев. М. Вишић. Aristotel, *Retorika*, Naprijed, Zagreb 1989, str. 178. par. 1407b16–18. Чини се да је прву реченицу боље превести тако да се из ње одмах види да је ту реч о *логосу* (прев. Ж. Калуђеровић): „За овај *логос* који јесте увек у људима нема разумевања”.

³ Многе написане странице као да покушавају надоместити сву згуснутост брахиолошког приступа Ефежанина, али и квалитативно рашчланити смисао и значења његових фрагмената. Тако је Ласал (F. Lassalle) написао књигу *Die Philosophie Herakleitos des Dunklen von Ephesos* (1858), која је веома обимна и има око 1000 страница текста.

⁴ Треба ипак напоменути да су веома високе оцене о Хераклитовом мисаоном раду исказивали и највећи филозофи у њеној потоњој историји. Након Хегела Ниче о Хераклиту пише: „Он поседује истину, нека се точак времена котрља куда жели, но никад неће бити кадар да умакне истини. Важно је чути да су такви људи једном живели.” Ф. Ниче, *Филозофија у трагичном раздобљу Грка*, Графос, Београд 1979, стр. 42. И Хајдегер се у свом разумевању *логоса*, расутом у многим његовим списима (*Битак и вријеме, Увод у метафизику*), као средишњег појма не само античке него и целокупне западноевропске филозофије, посебно осврнуо на Хераклитов *логос*, који је он тумачио као „збирајућу збраност”, реafirмишући тако на свој особени начин мисао великог Ефежанина и у двадесетом веку.

1. *хармонија*⁵ је увек склад између опрека
2. „све тече”
3. *космос* као вечито жива ватра.

Аристотел своје опсервације о Хераклиту у *Μεταφισιци* 1062a22-23 боји критичким тоновима: „Значи противстављене тврдње не могу бити истините с обзиром на исто”⁶ (*τὰς ἀντικειμένους ἄρα οὐκ ἐνδέχεται φάσεις ἀληθεύειν κατὰ τοῦ αὐτοῦ*). Другачије речено, ако би се усвојила супротна тврдња то би значило да су истина и лаж једно те исто, те да све може бити истина као што и све може бити заблуда.⁷ Стагиранин је критиковање Хераклитових теза које су биле у колизији са принципом контрадикције у *Μετ.* 1005b23-25 изложио следећим речима:

<i>Није могуће да неко мисли да нешто јест и да није, као што неки верују да Хераклеит тврди.</i>⁸	<i>ἀδύνατον γὰρ ὄντινοῦν ταῦτόν ὑπολαμβάνειν εἶναι καὶ μὴ εἶναι, καθάπερ τινὲς οἴονται λέγειν Ἡράκλειτον.</i>
--	--

Премда је, дакле, Аристотел оспоравао логичке импликације Хераклитовог тврђења о јединству опречности, јер се наизглед долази у неразрешив сукоб са начелом противречности, он је ипак суздржан у осуди Ефежанина. Осим што опрезно каже „као што | неки верују да Хераклеит тврди”, он у наставку текста пише (*Μετ.* 1005b25-26): „Али није нужно да неко мисли оно што говори”⁹ (*οὐκ ἔστι γὰρ ἀναγκαῖον, ἃ τις λέγει, ταῦτα καὶ ὑπολαμβάνειν*). Стагиранин не говори о томе како је Хераклит био лицемеран, како би се на први поглед могло учинити, већ пре да он није схватао пуно значење речи које је користио или да није до краја појмιο логичке домашаје својих тврдњи. Додатно појашњење овог места Аристотел нуди у *Μετ.* 1062a31-34, па и даље све до *Μετ.* 1062b7, где се каже да би Хераклит, када би био упућен у ствар на одговарајући начин, и сам уважио начело противречности.

⁵ Именица женског рода *ἁρμονία*, за коју многи филозофи кажу да је једна од кључних речи не само Хераклитовог дискурса него и питагорејаца, има следећа значења: „спајање”, „слагање”; „веза”, „уговор”, „склад”, „сагласје”, „хармонија”; лично име које означава Зевсову ћерку која се зове *Ἄρμονία*. *Хармонија* још може да значи „скала” и „октава”.

⁶ Прев. С. У. Благојевић. Аристотел, *Μεταφισика*, ПАИДЕИА, Београд 2007, стр. 393, 1062a22-23.

⁷ Сличне импликације поистовећивања „добра” (*ἀγαθόν*) и „зла” (*κακόν*) Аристотел наговештава у својој *Топици* 159b30-31 и *Физици* 185b20-22.

⁸ Прев. С. У. Благојевић. Аристотел, *Μεταφισика*, ПАИДЕИА, Београд 2007, стр. 125, 1005b23-25. Овде се вероватно мисли на следеће Хераклитове фрагменте: ДК22Б36, ДК22Б57 и ДК22Б59. На сличан начин Аристотел пише и у *Μετ.* 1010a10-15, 1012a24-25, 1012a33-34, 1062a31-34, 1063b24-25. Има и места где се не помиње ничије име али се алудира на Ефежанина, као у *Μετ.* 1006b28-34.

⁹ Прев. С. У. Благојевић. Аристотел, *Μεταφισика*, ПАИДЕИА, Београд 2007, стр. 125, 1005b25-26.

Анализирајући даље Аристотелове списе, може се видети да се у *Никомаховој етици* Хераклитови ставови наводе и парафразирају у неутралном контексту, без малочас наговештених негативних конотација (EH115564-6):

Док Хераклиту „што је опречно то је и пробитачно”, „од разлика настаје најљепши склад” и „све настаје борбом”.¹⁰

Καὶ Ἡράκλειτος τὸ ἀντίξουν συμφέρον καὶ ἐκ τῶν διαφερόντων καλλίστην ἁρμονίαν καὶ πάντα κατ’ ἕριν γίνεσθαι.

Да Аристотелови списи нуде и афирмативан приступ проблему борбе и склада кроз опреке, а не кроз једнакост, најбоље илуструје пример из *Еудемове етике* 1235a25-28:

И Хераклит приговара ономе који је ово испјевао: „Тако између људи и богова нестало свађа”. Не би наима било хармоније кад не би било високог и ниског тона нити живих бића без женског и мушког који су супротни.¹¹

καὶ Ἡ. ἐπιτιμᾷ τῷ ποιήσαντι ὥς ἔρις ἐκ τε θεῶν καὶ ἀνθρώπων ἀπόλοιτο· οὐ γὰρ ἂν εἶναι ἁρμονίαν μὴ ὄντος ὀξέος καὶ βαρέος οὐδὲ τὰ ζῶα ἄνευ θήλεος καὶ ἀρρενος ἐναντίων ὄντων.

Ови наводи показују да је Аристотелу било јасно да Хераклитов оригинални допринос филозофији лежи управо у схватању јединства у мноштвености и разлике у јединству, те да је сукоб опречности суштински за бивствовање једног.¹² Ово је видљиво и из Платоновог *Софиста* 242е, где се за Хераклита каже да је он „одлучнија муза” јер, по њему, „оно наима што се раздваја увијек се

¹⁰ Прев. Т. Ladan, Aristotel, *Nikomahova etika*, Hrv. sveuč. naklada, Zagreb 1992, str. 157, 1155b4-6. Овде се начелно парафразирају најмање три Хераклитова фрагмента: ДК22Б51, ДК22Б10 и ДК22Б80. Грчка именица женског рода *ἔρις* означава „свађу”, „препирање”, „правдање”, „неслогу”, „борбу”, „заваду”, „надметање”, „такмичење”. Персонификована као *Ἐρις* она је Аресова сестра и другарица, и зачетница боја и свађе. Позната је и по томе што је на свадби Пелеја и Тетиде међу госте бацила јабуку са натписом τῇ καλλίστη.

¹¹ Прев. М. Sironić. H. Dils, *Predsokratovci fragmenti I*, Naprijed, Zagreb 1983, str. 148, A22. Нем. изд. H. Diels, W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker I*, Weidmann 1985, s. 149, A22. Цитат у фрагменту је из Хомерове *Илијаде* XVIII, 107. Симпликије (Cat. 412, 26) након Хомерових стихова који изражавају жељу да између богова и људи нестане свађа умеће и следеће речи: „каже (Хераклит, прим. Ж. К) да ће све ствари нестати”. Похвале принципа јединства опречности изражене су и у псеудоаристотеловском спису *О космосу* 396б7-22.

¹² Мирослав Марковић је пронашао и систематизовао педесет Хераклитових фрагмената под насловом „Принцип јединства супротности као узрок јединства света” у својој књизи *Филозофија Хераклита мрачног*. Марковићев самосвојни подухват особеног приступа Ефежаниновим фрагментима Барнс је похвалио рекавши да је он „далеко супериорнији у односу на онај Дилс-Кранцов.” J. Barnes, *The Presocratic Philosophers I*, London 1979, p. 317.

наново здружује”.¹³ Ефежанинов фрагмент бр. 51 представља добру илустрацију наведене констатације (ДК22Б51):

„Не схваћају како се са собом слаже оно што је различно: (то је) унатраг окренута хармонија као код лука и лире”.¹⁴	οὐ ξυνιᾶσιν ὅπως διαφερόμενον ἑαυτῶν ὁμολογέει· παλίντροπος ἁρμονίη ὅκωσπερ τόξου καὶ λύρης.
---	---

Артемиде је Аполонова сестра која је носила исте ознаке као и он, лук и лиру. Лира је обележје игре жицом и њене хармоније и она се јавља у облику лука. Артемиде је и богиња лова, на шта упућује лук, али је и заштитница рађања, односно богиња природе, *physisa*, у смислу онога што ниче. Она је тако преко стреле и лука богиња смрти, а као заштитница свега што је младо и нејако она је била и богиња живота. Артемиде је, прецизније речено, била и богиња живота и богиња смрти. Иако постоје сложена и различита тумачења односа између лука и лире, која су праћена и интересантним графичким илустрацијама, Хераклитова намера била је да поручи да многе наизглед независне и опречне ствари јесу једно, и да са друге стране, опреке које многи људи уочавају и у којима и сами учествују стоје у крајњој линији у некој *хармонији*¹⁵ тј. да је на делу учење о *coincidentia oppositorum*.

Слично се да утврдити и из оних фрагмената у којима се говори да су „и ноћ и дан једно” (ДК22Б57), да „добро и зло јесу једно” (ДК22Б58), да је путања која је „права и крива једна” (ДК22Б59), да „пут нагоре и пут надолу један је и исти” (ДК22Б60), или да (прев. Ж. К): „Богу је све лепо и добро и праведно, али људи једно држе за неправедно а друго за праведно” (ДК22Б102). Ако се оставе по страни „теолошке” и неке друге импликације овог фрагмента, јасно је да постоји идентитет опречних ствари између праведног и неправедног у 102. фрагменту.¹⁶ Све ово још је видљивије из обухватности Хераклитовог 67.

¹³ Прев. М. Сиронић. Платон, *Софист*, у: *Кратил. Теетет. Софист. Државник*, ПЛАТΩ, Београд 2000, стр. 247, 242е.

¹⁴ Прев. М. Сиронић. Н. Dils, *Predsokratovci fragmenti I*, Naprijed, Zagreb 1983, str. 154, B51. Нем. изд. Н. Diels, W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker I*, Weidmann 1985, s. 162, B51. Превод Ж. К. гласи: „(Људи) не схватају како се оно што је у себи противно слаже са самим собом; то је *хармонија* попут оне код лука и лире”.

¹⁵ И Филон тврди (*Rer. div. her.*; 43 (Р.П. 34е) да се у томе састојала основна Хераклитова замишља. Осим *ἁρμονία*-е и *πόλεμος* („бој”, „рат”, „битка”, „борба”, „свађа”) јесте веома важна реч у Хераклитовим фрагментима.

¹⁶ Барнс каже да овај фрагмент није илустрација Хераклитове тезе о јединству опречности. Он не показује да су праведно и неправедно једно те исто, него насупрот томе потврђује да ништа није неправедно. Наиме, упркос обичним људским судовима, све што се дешава је из визуре бога, па према томе и у збиљи, праведно и добро. Коначно, закључује Барнс, ако се све „настаје кроз борбу”, а „правда је борба”, лако је утврдити да је све праведно, и да је овај свет, лајбницовски речено, најбољи од свих светова. J. Barnes, *The Presocratic Philosophers I*, London, 1979, p. 131-132.

фрагмента (ДК22Б67) у коме се уочава да је бог: дан-ноћ, зима-лето, рат-мир и ситост-глад. Из овог фрагмента може се закључити не само да су опреке једног рода идентификоване једна са другом, већ да и целина диспаратних феномена показује, када се боље размисли, своју интринсичну повезаност и јединство. Због тога Хераклит у 50. фрагменту (ДК22Б50) и може да каже да није нужно послушати њега већ *логос*, и да је „мудро сложити се да је све једно”, тј. да постоји онтолошко јединство свега јер *ἐν πάντα εἶναι*.¹⁷

За Хераклита једно и постоји само у „свађи” опрека јер је та „борба” и „напетост” битна за јединство једног и она, штавише, представља највишу правду. Прави склад по Хераклиту једино је и могућ између онога што је различито и супротстављено. И у *physisu*, уосталом, склад се постиже између опречних ствари а не између сличних, пошто јединство једино и може произаћи из опречних спојева, док из сличног у најбољем случају произилази некакав континуитет.

Основ Хераклитовог сукоба са претходницима и са савременицима вероватно лежи у дубоком неслагању са ставом других мислилаца о егзистенцији универзума у условима потпуне хармоничности. Најбоље стање, нпр. по Питагори, оно је у коме су опречни квалитети толико измешани, уз пуно поштовање закона пропорције, да су њихове опозиције неутрализоване до те мере да они продукују еуфонију у музици, здравље у телу и *космос*, тј. ред и лепоту у универзуму као целини. Ово стање мира између опрека које су до тад биле у рату, успостављено је наметањем граница (*peras*) неуређеном неограниченом (*apeiron*). Питагора и његови следбеници овакво стање звали су добрим, а њихове опозите свађу, болест и борбу, називали су злим. Како Аетије преноси (ДК22А6), Хераклит је „из свега уклањао мировање и стајање”, јер је то, по њему, било својство мртваца.¹⁸ Он је „кретање додавао свим стварима”, и то вечно кретање вечним стварима, а пролазно кретање пролазним стварима. Ако уопште и постоји савршено направљена мешавина са адекватном пропорцијом делова који је чине, то је једино стога, сматра Хераклит, што су опреке које су у сукобу достигле стадијум уједначености у напетости или баланс у моћи, у којој ниједна не може да доминира над другом, па онда постоји својеврсна равнотежа моћи. Ако, дакле, и постоји

¹⁷ Наравно да овај „идентитет” опрека код Хераклита није једнодимензионалан, него да се може дистинговирати у најмање четири варијације. Најпре, то је реципрочна сукцесивност и промена квалитета или ствари који су опречне стране истог континуума. Потом, то је релативност опрека спрам онога ко је „субјект” догађаја, о чему пише и Аристотел у *EH1175a5-9*. Треће, то је међусобна зависност опрека у домену вредновања. Коначно, у четвртм смислу постоје опреке које су само различити аспекти исте ствари, што Хераклита приближава поштој дистинкцији перзистентног супстрата и онога што се мења.

¹⁸ Насупрот оваквом ставу Хераклита, у познатој десеточлавној табели опрека која се приписује Алкмеону из Кротона („ограничено и неограничено, непарно и парно, једно и мноштво, десно и лево, мушко и женско, мирујуће и крећуће, право и искривљено, светло и тама, добро и зло, квадрат(но) и правоугаон(о)ик”, *Мет.* 986a23-26), „мирујуће” (*ἡρεμοῦν*) се налази на „доброј” страни заједно са ограниченим, непарним, једним, десним, мушким, правим, светлом, добрим и квадрат(ним)ом.

хармонија, она је једино могућа у ситуацији која је наведена у 51. фрагменту, као склад између лука и лире.

У две чувене речи *πάντα ῥεῖ* („све тече“) које се приписују Хераклиту, иако се у том облику нигде код њега не налазе, сажет је метафизички допринос читаве старије јонске филозофије природе у своју најопштију форму. Тзв. „речни“ фрагменти (ДК22Б12,¹⁹ ДК22Б91), према платоновској интерпретацији која је потом прихваћена и проширена од Аристотела, Теофраста и доксографа, изречени су од стране „мрачног“ Ефежанина да нагласе апсолутни континуитет промене у свему, тј. да је све у сталном току. Вероватно је на основу Платонових речи из *Кратила* 402а, које говоре о томе да је Хераклит негде рекао да све пролази и да ништа не траје и извучен потоњи Аристотелов закључак (*Phys.*253b9-11):

Неки пак, / тврде да није тачно то да се нека бића крећу а друга не, већ да се крећу сва и увек али да то остаје скривено нашем опажању.²⁰

καὶ φασὶ τινες κινεῖσθαι τῶν ὄντων οὐ τὰ μὲν τὰ δ' οὐ, ἀλλὰ πάντα καὶ αἰεὶ, ἀλλὰ λανθάνειν τοῦτο τῇν ἡμετέραν αἴσθησιν.

Стагиранин овде само појашњава и експлицира оно што је код Платона, премда имплицитно, већ садржано. Реч је о томе да многе ствари, па и оне које се чине потпуно постојаним, бивају подвргнуте невидљивим, тј. неопаженим променама. Друга је ствар да ли је Платоново виђење Хераклита аутентично или је пак реч о некој врсти претеривања и искривљавања Ефежаниновог несумњивог наглашавања промене. Да је можда у питању ово последње говоре барем два места из *Метафизике*. На првом Аристотел тврди (*Met.*1010a13-15) да је Кратил критиковао Хераклитову изјаву да се не може двапут стати у исту реку, додајући сам да се то не може учинити ниједанпут. На другом месту (*Met.*987a32-987b1) каже се да је Платон упознао Кратила још у својој младости, па је сасвим могуће да је под његовим утицајем и прихватио модификовану верзију Хераклитовог

¹⁹ Део Хераклитовог фрагмента бр. 12 (ДК22Б12) гласи:

Желећи наиме показати да се увијек могу умом спознати душе које се испарују, упоредио их је с ријекама говорећи тако: онима који у исте ријеке улазе друге и друге воде притјечу, а и душе се из влаге испарују (?). Глсн. Б 49 а 91 и А 6. 15]

βουλόμενος γὰρ ἐμφανίσαι, ὅτι αἱ ψυχαὶ ἀναθυμιάμεναι νοεραὶ αἰεὶ γίνονται, εἰκασεν αὐτὰς τοῖς ποταμοῖς λέγων οὕτως· ποταμοῖσι τοῖσιν αὐτοῖσιν ἐμβαίνουσιν ἕτερα καὶ ἕτερα ὕδατα ἐπιρρεῖ καὶ ψυχαὶ δὲ ἀπὸ τῶν ὑγρῶν ἀναθυμιάονται (?) [vgl. B 49a. 91 und A 6. 15].

Прев. М. Sironić. H. Dils, *Pred Sokratovci fragmenti I*, Naprijed, Zagreb 1983, str. 150, B12. Nem. izd. H. Diels, W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker I*, Weidmann 1985, s. 154, B12.

²⁰ Прев. С. У. Благојевић. Аристотел, *Физика*, ПАИДЕИА, Београд 2006, стр. 313, пар. 253б9-11. Подвукао Ж. К. Иако се не помиње ниједно име већ „неки“, овде је готово извесно реч о Ефежанину, а не о атомистима, како верује Благојевић. Хераклитово учење о току чулног света споменуто је још на неколико места код Аристотела, нпр. у *Met.*1063a22, 1063a33-36; *Cael.*29829-30.

учења. Разлика између две доктрине може се и овако изложити: у Кратиловој верзији реч је о томе да „све тече у сваком погледу”, што је својеврсна „јерес” Хераклитове изворне доктрине да „све тече у неком погледу”.²¹

Поред наглашавања промене²² у Ефежаниновим фрагментима, постоји још један моменат који треба напоменути. Доиста, да је Хераклит рекао само нешто попут „све тече”, то не би било ништа више до скоро тривијална констатација неупитна за сваког грчког филозофа и грађанина, барем до појаве Парменида и елејске школе. Оно по чему Хераклит јесте јонски мислилац, по мишљењу Аристотела, првенствено је због увођења основног бивства свега које је он именовао као „ватру” (πῦρ).

Код историчара филозофије нема сагласности о томе како је Хераклит у својим „ватреним” фрагментима (ДК22Б30,²³ ДК22Б31, ДК22Б90) третирао ову

²¹ Слично говори и Марковић када анализира 12. Хераклитов фрагмент, тј. 40. у властитој нумерацији. М. Марковић, *Филозофија Хераклита мрачног*, Нолит, Београд 1983, стр. 97–102. За разлику од пренаглашавања овог, ако се тако може назвати, „динамичког” момента у тумачењу Хераклита, које се најчешће приписује Платону, Бошњак открива код Хајдегера супротну тенденцију. Он сматра да у Хајдегеровој интерпретацији Ефежанина преоминантну улогу има „статички” моменат, и то изражава следећим речима: „Скупљање је према томе само дио процеса, једна његова страна. За цјелину је потребан и супротни дио, то јест разасипање. ... Зато се Хеидеггера теза о логосу као скупљању не може примитијенити на Хераклита, јер скупљање, које је само дио супротности, не може имати примат над другим дијелом. ... Наглашавањем само скупљања мијења се однос супротности и опћа динамичност добива претежно сврху *статичности*, а то би било прије у вези с Парменидом него с Хераклитом.” В. Бошњак, *Logos i dijalektika*, Naprijed, Zagreb 1961, стр. 64 i 65.

²² Властос каже да Хераклит замењује Анаксимандров еквилибријум елемената са еквилибријумом процеса промене. G. Vlastos, „On Heraclitus” р. 420, у: D. J. Furley, R. E. Allen, *Studies in Presocratic Philosophy I*, New York 1970.

²³ Тридесети фрагмент је, како тврди Кирк, од стране Хераклита изречен и разматран као посебно важан (ДК22Б30):

Овај козмос (пред свијета) исти за све, није учинио ниједан од богова нити од људи, него бијаше увијек и јест и бит ће вјечно жива ватра, која се по мјерама (периодички) пали и по мјерама гаси.

κόσμον τόνδε, τὸν αὐτὸν ἀπάντων, οὔτε τις θεῶν οὔτε ἀνθρώπων ἐποίησεν, ἀλλ’ ἦν ἀεὶ καὶ ἔστιν καὶ ἔσται πῦρ ἀείζων, ἀπτόμενον μέτρα καὶ ἀποσβευνόμενον μέτρα.

Прев. М. Sironić. Н. Dils, *Predsokratovci fragmenti I*, Naprijed, Zagreb 1983, стр. 152, В30. Nem. izd. Н. Diels, W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker I*, Weidmann 1985, s. 157–158, В30. Марковић каже да је у 30. фрагменту садржано језгро Хераклитове физике. Трајност овога света осигурана је чињеницом да оно што му подлежи јесте вечита, божанска ватра; затим, разноликост истог тог света последица је непрестаних квалитативних промена основног бивства, тј. ватре; и, треће, током сваке квалитативне промене ватра мора да се покорави принципу одређене мере или константног *quantuma* те промене. Три основна принципа Хераклитове физике, по мишљењу Марковића, су: „Ватра, квалитативна промена, константна мера те промене”. М. Марковић, *Филозофија Хераклита мрачног*, Нолит, Београд 1983, стр. 126.

подлежећу (с)твар. Спектар тумачења креће се од потпуног прихватања ватре као начела у милетском смислу речи (Барнс), преко изражене недоумице може ли се она на тај начин разумети (Јегер), па све до тврдње да је Ефежанинова ватра једва нешто више од чулне манифестације константног тока и одбијања њеног повезивања са водом или ваздухом претходника (Чернис, Кирк, Равен). Ватра је, даље, по Хајдегеровом мишљењу била само још један облик у коме се показује битак бића, док је Гатри сматрао да је треба поистоветити са *логосом*, или је, на трагу Стоика и Хиполита, назвати оним што је одговорно за управљање целим светом. Коментатори се споре и око тога да ли је Хераклит заступао учење о свеопштем пожару (*ἐκπύρωσις*), по коме се читав свет враћа архетипској ватри из које је и настао, или не. Постоје и дилеме је ли Хераклит физикални облик властитог принципа уопште изразио као ватру, или пак као неко испаравање, или време.²⁴

Ако је у Аристотелово доба и постојала толика дисперзивност ставова о Хераклитовим фрагментима, он сам, чини се, није имао много дилема. Да је ватра перзистентни супстрат свега показује се на неколико места у Стагираниновим списима. У *Метафизици* (984a7-8) Аристотел најпре наводи да је вода начело по Талесу, а ваздух по Анаксимену и Диогену, а затим додаје:

<i>Χιπας из Μεταποντα и Хераклеит из Ефеса постављају Ватру.</i>²⁵	Ἰππασος δὲ πῦρ ὁ Μεταποντῖνος καὶ Ἡράκλειτος ὁ Εφέσιος.
--	--

У својеврсном прегледу поглавља 3, 4 и 5 прве књиге *Метафизике*, Стагиранин у *Мет.*987a4-7 каже:

<i>Од оних првих то телесно начело (јер, вода, / ватра и све слично томе јесу тела) које једни сматрају јединственим а други мисле да тих телесних начела има више; али и једни и други их постављају као тварна.</i>²⁶	παρὰ μὲν τῶν πρώτων σωματικὴν τε τὴν ἀρχὴν (ὑδὼρ γὰρ καὶ πῦρ καὶ τὰ τοιαῦτα σώματά ἐστιν), καὶ τῶν μὲν μίαν τῶν δὲ πλείους ἀρχὰς τὰς σωματικὰς, ἀμφοτέρων μὲντοι ταύτας ὡς ἐν ὕλης εἶδει τιθέντων.
---	---

Ако се занемари помало конфузна конструкција текста у оригиналу, па се пажња усредсреди на оно што је примарно у овом истраживању, може се закључити следеће: то што се у *Мет.*987a5 спомиње ватра (πῦρ), као и то што у *Мет.*987a7 пише да су ова начела „тварног облика” (ἐν ὕλης εἶδει), указује да се овде алудира

²⁴ Па чак можда и као ваздух, како преноси Sekst Empirik у *Adv. math.* IX 360, X 233.

²⁵ Прев. С. У. Благојевић. Аристотел, *Метафизика*, ПАИДЕИА, Београд 2007, стр. 12, 984a7-8. О питагорејцу Хипасу не зна се много сем што се у пару са Хераклитом наводи као заговорник тезе о ватри као *arche*-у (о чему сведоче и фрагменти ДК18.7 и ДК18.8). Код Дилса (ДК18.1a) може се пронаћи и мишљење из лексикона *Suida* да је Хераклит био Хипасов ученик. Рос, напротив тврди да је Хипас, по свој прилици, живео нешто после Хераклита и да је властити систем обликовао тако што је фузионисао питагорејске и хераклитовске елементе. W. D. Ross, *Aristotle's Metaphysics I*, Oxford 1997, p. 130.

²⁶ Прев. С. У. Благојевић. Аристотел, *Метафизика*, ПАИДЕИА, Београд 2007, стр. 21, 987a4-7.

на Хераклита (и Хипаса) који је, као што је показано у *Мет.*984a7-8, поставио ватру као материјални узрок. Онај део реченице у *Мет.*987a5 који гласи: „које једни сматрају јединственим” („и то од једних једно”, прев. Т. Ладан) (*καὶ τῶν μὲν μίαν*), додатно учвршћује констатацију да је Ефежанин био међу оним филозофима који су „баратали” само са једним узроком.

Из списка *О небу* (298629-33) вероватно је најбоље видљиво да је за Аристотела Хераклит само један из плејаде јонских мислилаца:

*Неки, затим, сматрају да све настаје, протиче и не остаје постојано, изузев једне једине ствари из које произилазе све на начин претварања, што би нема сумње био смисао поставки Хераклита из Ефеса, али и многих других.*²⁷

οἱ δὲ τὰ μὲν ἅλλα πάντα γίνεσθαι τέ φασι καὶ εἶναι δὲ παγίως οὐθέν, ἐν δὲ τι μόνον ὑπομένειν, ἐξ οὗ ταῦτα πάντα μετασχηματίζεσθαι πέφυκεν· ὅπερ εἰκόασι βούλεσθαι λέγειν ἄλλοι τε πολλοὶ καὶ Ἡράκλειτος ὁ Εφέσιος.

Сличан вокабулар задржан је и у потоњој доксографској традицији где је *pyr*, такође, третирана као *arche* и *physis* у милетском смислу речи. Транспарентно то сугеришу Теофрастови записи које преноси Симпликије. Ево једног таквог примера (ДК22А5):

*Хипаз Метапонћанин и Хераклит Ефежанин, и они задржаше једно покретно и ограничено, али ватру учинише почелом и из ватре изводе ствари згушњавањем и разређивањем и опет их разрјешују у ватру јер је ова једина природна подлога. Хераклит наиме каже да је све замјена за ватру.*²⁸

Ἱππασος δὲ ὁ Μεταποντῖνος καὶ Ἡ. ὁ Εφέσιος ἐν καὶ οὗτοι καὶ κινούμενον καὶ πεπερασμένον, ἅλλὰ πῦρ ἐποίησαν τὴν ἀρχήν, καὶ ἐκ πυρὸς ποιοῦσι τὰ ὄντα πυκνῶσει καὶ μανῶσει καὶ διαλύουσι πάλιν εἰς πῦρ, ὡς ταύτης μῖα οὔσης φύσεως τῆς ὑποκειμένης· πυρὸς γὰρ ἀμοιβὴν εἶναι φησιν Ἡ. πάντα.

Сасвим је могуће да је Аристотел приписивао Хераклиту већ поменуто учење о свеопштем пожару или *ekpyrosis*,²⁹ које је онда само још једна потврда о начелном карактеру ватре код Ефежанина. Стагиранин то у *Физици* 205a3-4 каже следећим речима:

²⁷ Прев. М. Тасић. Аристотел, *О небу*, Графос, Београд 1990, стр. 76, пар. 298629-33. Блискост Хераклита и његових милетских претеча Аристотел је нагласио и последњим речима овог пасуса „али и многих других.” Неки филозофи (Гатри) сматрају да је Аристотелова тврдња о томе да је Хераклитов систем у суштини милетског типа, у ствари, претпоставка која је погрешно постулирана. W. K. C. Guthrie, *A History of Greek Philosophy I*, Cambridge 1962, p. 451.

²⁸ Прев. М. Sironić. H. Diels, *Predsokratovci fragmenti I*, Naprijed, Zagreb 1983, str. 142 i 143, A5. Nem. izd. H. Diels, W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker I*, Weidmann 1985, s.145, A5. Последња реченица је, иначе, парафраза Хераклитовог 90. фрагмента (ДК22Б90).

²⁹ Другачије становиште износи Барнет у својој књизи. J. Burnet, *Early Greek Philosophy*, Cleveland 1962, p. 157-163.

Као што Хераклеит тврди да једном
све постаје ватра.³⁰

ὥσπερ Ἡράκλειτος φησιν ἅπαντα γίνεσθαι
πότε πῦρ.

На крају треба размотрити и оно становиште, које Хегеловим речима, „за реалан облик Хераклитовог принципа” поставља „испаривање” (*ἀναθυμίασις*), а не, као што је то уобичајено, „ватру” (*πῦρ*). Некакво утемељење овакве тезе могуће је пронаћи у следећем пасусу из Аристотеловог списка *О души* (405a25-29):

И Хераклит тврди да је душа почело,
ако каже да је испаривање, из којега
он саставља остало, и додаје да је
најбестјелеснија и увијек тече те да
се покренуто спознаје покренутим.
Да су ствари у кретању мислио је он
и већина других.³¹

καὶ Ἡράκλειτος δὲ τὴν ἀρχὴν εἶναι φησι
ψυχὴν, εἴπερ τὴν ἀναθυμίασιν, ἐξ ἧς τὰλλα
συνίστησιν· καὶ ἀσωματώτατον δὴ καὶ ῥέον
αἰεὶ· τὸ δὲ κινούμενον κινουμένῳ γινώσκεισθαι.
ἐν κινήσει δ' εἶναι τὰ ὄντα καὶ κεῖνος ᾤετο
καὶ οἱ πολλοί.

Да између два појма „испаривање” и „ватра” не постоји непремостиви јаз, како се евентуално у први мах чини, постаје јасно када се подсети како Аристотел разматра први поменути појам. У својој *Метеорологици* Стагиранин каже да постоје два начина или две врсте испаравања. Једно је топло, суво и „пуно дима” (*Μετεορ.*360a10-13), које настаје када се земља загрева од стране сунца (*Μετεορ.*341b 6-7). Друго испаравање је хладно, влажно и „пуно паре” (*Μετεορ.*360a9-10), које настаје из воде (*Μετεορ.*346b 32). Прво испаравање је, дакле, „врхуће”, оно настаје „загревањем” и „пуно је дима”. У *Μετεορ.*360a13 употребљава се грчки израз *πνεῦμα*, који можда и најквалитетније одражава везу која постоји између наших речи „испаривање” и „ватра”. Јер *πνεῦμα* између осталог значи и „врели дах” и „огњена пара” па чак и „пламен”, што даје за право да се овом типу испаравања припише атрибут „ватрено” и да се поверује да је на њега Аристотел мислио у *De an.*405a26.³²

У закључку треба рећи да се практично свака тема везана за Хераклита која је дотакнута у овом раду може, следећи Аристотелов приступ Ефежанину, консеквентно и доследно објаснити.³³ При том се, дакако, мора узимати у обзир централна теза да су природне промене свих врста умерене и избалансиране, а да је узрок ове равнотеже ватра, која је заједнички конституент свих ствари, њихов материјални и једини узрок.

³⁰ Прев. С. У. Благојевић. Аристотел, *Физика*, ПАИДЕИА, Београд 2006, стр. 105, 205a3-4. Стагиранин је вероватно мислио на следеће фрагменте Ефежанина: ДК22Б30, ДК22Б31, ДК22Б63, ДК22Б64, ДК22Б65, ДК22Б66 и ДК22Б90. Слично Аристотел пише и у *Мет.*1067a4-5, као и Симпликије у *De cael.*94,4 (ДК22А10).

³¹ Прев. М. Sironić. Aristotel, *О души. Наговор на филозофију*, Naprijed, Zagreb 1987, стр. 11, 405a25-29. Овај пасус из списка *О души* је парафраза Хераклитовог 12. фрагмента (ДК22Б12).

³² Уосталом, нешто раније (*De an.*405a4-5) Стагиранин и каже да је „неко” помислио да је душа ватра, мислећи, свакако, на Ефежанина.

³³ Тако да се, рецимо, на основу 67. Хераклитовог фрагмента (ДК22Б67) може довести у везу чак и бог и ватра.

Литература

- Аристотел, *Физика*, ПАИДЕИА, Београд 2006.
- Аристотел, *Метафизика*, ПАИДЕИА, Београд 2007.
- Aristotel, *Nikomahova etika*, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb 1992.
- Aristotel, *O duši. Nagovor na filozofiju*, Naprijed, Zagreb 1987.
- Аристотел, *О небу*, Графос, Београд 1990.
- Aristotel, *Retorika*, Naprijed, Zagreb 1989.
- Aristotelis Opera*, ex rec. Immanuelis Bekkeri, ed. Acad. Regia Borussica, I-V, Berlin 1831-1870. Ново издање је припремио О. Гигон, Берлин 1970-1987. Сви Аристотелови наводи сравњивани су према овом издању.
- Барнет, Ц., *Рана грчка филозофија*, Завод за уџбенике и наставна средства Београд 2004.
- Barnes, J., *The Presocratic Philosophers I*, London 1979.
- Bošnjak, B., *Logos i dijalektika*, Naprijed, Zagreb 1961.
- Bröcker, W., "Heraklit zitiert Anaximander", u: *Um die Begriffswelt der Vorsokratiker*, hrsg. H. G. Gadamer, Darmstadt, 1968.
- Burnet, J., *Early Greek Philosophy*, Cleveland 1962.
- Cherniss, H., *Aristotle's Criticism of Presocratic Philosophy*, New York 1964.
- Cornford, F. M., *From Religion to Philosophy*, New York 1957.
- Diels, H., Kranz, W., *Die Fragmente der Vorsokratiker I-III*, Weidmann 1985-1987.
- Dils, H., *Predsokratovci fragmenti I-II*, Naprijed, Zagreb 1983.
- Furley, D. J., Allen, R. E., *Studies in Presocratic Philosophy I*, New York 1970.
- Guthrie, W. K. C., *A History of Greek Philosophy I*, Cambridge 1962.
- Хегел, Г. В. Ф., *Историја филозофије I*, БИГЗ, Београд 1975.
- Хераклит, *Фрагменти*, Модерна, Београд 1990.
- Jaeger, W., *The Theology of the Early Greek Philosophers*, Oxford 1967.
- Калуђеровић, Ж., *Аристотел и предсократовци*, КриМел, Нови Сад 2004.
- Kirk, G. S., Raven, J. E., *The Presocratic Philosophers*, Cambridge 1957.
- Коплстон, Ф., *Историја филозофије Грчка и Рим*, БИГЗ, Београд 1991.
- Лаертије, Д., *Животи и мишљења истакнутих филозофа*, БИГЗ, Београд 1973.
- Марковић, М., *Филозофија Хераклита мрачног*, Нолит, Београд 1983.
- Марковић, М., *FLORILEGIUM PHILOSOPHUM GRAECUM*, Научна књига, Београд 1951.
- Ниче, Ф., *Филозофија у трагичном раздобљу Грка*, Графос, Београд 1979.
- Платон, *Кратил. Теетет. Софист. Државник, ПЛАТОН*, Београд 2000.
- Ross, W. D., *Aristotle's Physics*, Oxford 1998.
- Ross, W. D., *Aristotle's Metaphysics I-II*, Oxford 1997.
- Vindelband, V., *Istorija filozofije*, Book & Marso, Beograd 2007.
- Vlastos, G., "On Heraclitus", u: D. J. Furley, R. E. Allen, *Studies in Presocratic Philosophy I*, New York 1970.

Željko Kaluđerović, Ph. D., Novi Sad

HERACLITUS FIRE

Summary

The author analysis Aristotle's perception of Heraclitus philosophy, which is discussed through the prism of Stagiranin's four-part causal schema. According to the author Aristotle put forwards powerful arguments and thus, persistently defended his own thesis that Heraclitus was a typical representative of Ionian philosophy of nature. This attitude Stagiranin supported not only because of Heraclitus birth place but primarily of Ephesus postulates on fundamental being. Thus, after studying Heraclitus fragments, Aristotle eventually concluded that fire is a persistent substratum of the whole and thus, it should be treated as *arche* and *physis* in millennium sense of proportion. Following Aristotle's thinking, Heraclitus adhered to the principle, fire, which is in a "creative form", and according to the Stagiranin's cause typology it was classified as a material cause.

Key words: Heraclitus, philosopher of nature, fire, *arche*, *physis*, principle, 'creative form', material cause

Д-р Желько Калуджерович, Новый Сад

ОГОНЬ ГЕРАКЛИТА

Резюме

Автор в настоящей работе анализирует видение Аристотеля, относящееся к философии Гераклита, которая рассмотрена через призму четырёхгранной каузальной схематики Стагирана. Аристотель, по мнению автора, крепко аргументировал и последовательно защищал свой тезис, что Гераклит был типичным представителем ионийской философии природы. Такое положение Стагирана не отстаивал только на основании места рождения Гераклита, но первично имея в виду разыскивание основной сущности Эфежанина. Аристотель после изучения фрагментов Гераклита, пришёл к выводу, что огонь является первичным фундаментом, основой всего, и что его нужно понимать как *arche* и *physis* в милетском смысле речи. У Гераклита, по мнению Аристотеля, ещё говорилось об одном начале, огне, который в „материальной форме“ и который в типологии причин Стагирана, был включён в категорию материальной причины.

Опорные слова: Гераклит, философ природы, огонь, *arche*, *physis*, начало, „материальная форма“, материальная причина

Др Зоран Аврамовић

Миља Вујачић

Институт за педагошка истраживања

Београд

UDK 159.928.23-057.874

UDK 37.025:159.928.23

Прегледни чланак

Примљен: 30. XI 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 878–889.

ОДНОС НАСТАВНИКА ПРЕМА ДАРОВИТИМ УЧЕНИЦИМА¹

Резиме

У раду се разматра појам даровитости. Аутори полазе од тезе да се појам даровитости може довести у везу са елитистичком теоријом друштва. Проблем елите и даровитости актуелизован је у модерном друштву, пре свега у тржишној привреди, концепту који полази од предузетничких способности појединца. У другом делу рада појам даровитости разматра се у контексту школе и улога наставника у раду са даровитом децом. Дат је приказ и анализа резултата добијених истраживањем у основним, средњим стручним школама и гимназијама у Србији. Основна истраживачка питања од којих аутори полазе су: како наставници разликују даровите ученике од недаровитих и какав однос наставници имају према даровитој деци. Резултати указују на то да наставници углавном опажају и оцењују даровите ученике кроз таленат за поједине предмете. Наставници и учитељи се више ослањају на природни дар деце него што се баве подстицањем даровитих ученика. Наше истраживање показује да наставници не истичу довољно когнитивне, интелектуалне, уметничке, и социјалне аспекте даровитости ученика.

Кључне речи: даровитост, елита, даровити ученици, наставници, школа

Проблем даровитости може се повезати са елитистичком теоријом друштва. Именица «елита» значи најбољи, најотменији. Са социолошког становишта значајно је питање како се стварају елите и каква је њихова улога у друштву? Најдубљи утицај у овој тематици остварили су италијански социолози Вилфредо Парето (1848–1923) и Гаetano Моска (1858–1941). Они су сматрали да су личне

¹ Напомена: Чланак представља резултат рада на пројекту »Образовање за друштво знања«, број 149001 (2006-2010), чију реализацију финансира Министарство за науку и технолошки развој Републике Србије.

особине појединаца од суштинског значаја за конституисање елите, при чему су разликовали »лавове« и »лисице«. Они први су спремни на одлучну и насилну акцију да би успели у некој јавној делатности, а они други користе лукавства и преваре. У каснијој фази развоја теорије елите Парето је истицао и значај институција за настанак, обнову и нестанак елита. Њихово заједничко уверење било је, међутим, да се владавина елита у савременом друштву не може избећи.

Либерална схватања полазе од уверења да се елита ствара на основу способности и знања које појединци и групе покажу у практичном и духовном животу. Тако, узима се као критеријум достигнута квалификација, јавно признавање успеха, политичка вештина. Модерни теоретичари елита сматрају да успех и моћ произлазе из места у систему институција. По мишљењу Рајта Милса, који је анализирао америчко друштво 50-их година, три најважније институције су држава, велике корпорације, војска (Милс, 1998). Елита моћи, сачињена од економске, војне и политичке моћи, влада америчким друштвом. Она управља и масовним медијима који формирају јавно мишљење и свест човека из масе усредсређеног на своју породицу, рад, доколицу и комшилук.

Критичари Парета и Моске тврдили су да они у својим теоријским схватањима поједностављују проблем односа елите и масе, док су критичари Милсове елите власти сматрали да није довољно осветљен проблем доносиоца одлука који је од кључне важности за власт.

Проблем елите, а самим тим и даровитости, актуализован је у модерном друштву, пре свега у тржишној привреди. То је концепт привређивања који полази од предузетничких способности појединаца и иновативних капацитета радне организације.

Идеја предузетништва обухвата пре свега личност и организацију. Од највећег су значаја за појединачни успех, особине предузетне личности: иницијативност, самопоуздање и самоуважавање, знање о пословању и управљању, праћење пословних процеса у својој области, упорност, стрпљивост и дисциплинованост у послу, храброст и преузимање ризика, брзе реакције али са контролом емоција, комуникативност, лична организованост, избегавање стресних ситуација, легалистичко понашање, спремност да се брзо исправе грешке, елегантан изглед и културно понашање. Ова идеја подразумева и препознавање и искоришћавање повољних прилика у чијем је средишту располагање информацијама о могућностима пословног и сваког другог успеха.

Други кључни чинилац стварања елите је иновативна организација. Њене кључне карактеристике су оријентација на стваралаштво и професионалну делатност и понашање, максимална отвореност према даровитости свих запослених, отворена комуникација (садржински односи, а не затвореност и егоизам), интелектуално и радно такмичење, а не борба за моћ, подстиче »социјалну климу« у организацији. Иновативна организација спаја личне и друштвене циљеве.

Елите у модерној организацији друштва нису више случајни производ природе, већ део образовног система. Оне се регрутују у школи и отуда потреба да размотримо однос наставника према даровитим ученицима.

Научна истраживања појма даровитости показују да ова проблематика није само питање образовања, већ и значајно развојно питање друштва. Проблем даровитости је комплексан и тешко сагледив, а истраживачке технике за његово мерење којима располажемо су непоуздане. Појам даровитост није довољно операционализован да би нам помогао у наставном раду и образовању (Максић, 1993). Филозофске тезе о кретивности као »потпуно ирационалној, мистичној способности« (Попер, 1993) нису плод произвољних спекулација.

Кретивност је једно од основних обележја даровитости. Овај појам обухвата скуп интелектуалних, социјалних, емоционалних особина личности и њених активности, постигнућа. »Креативност се одређује као својство појединца (особине личности), карактеристике понашања или обележја одређених постигнућа и производа« (Максић, 1993: 153-154). Главни извори креативног постигнућа су интелектуални процеси, знања, интелектуални стил, особине личности, мотивација, окружење. Имплицитна претпоставка оваквог схватања креативности је у томе да се ово својство личности учи (реакција на стимулусе).

У литератури се, као фактори креативности, издвајају способности у мишљењу, откривању идеја, разраде, изражавања, оригиналност, флексибилност, флуентност, редифиниција, елаборација. То су, заправо, различити облици способности: (а) способност да се мисли, опажа, осећа другачије (на нов начин) од других, (б) способност еластичног мишљења, прелажење са једног типа мишљења на други, (в) способност поседовања богатства идеја и речи, (г) способност разраде детаља и стварање целине, (д) способност тумачења познатог на нов начин (Карлаварис, Барат и Каменов, 1988).

О даровитости појединаца и друштвених група требало би расправљати на диференциран начин: даровитост је условљена: (1) узрастом, полом, друштвеном средином, културним обрасцима, потребама, (2) облашћу у којој се креативан рад изводи (уметност, природне науке, друштвене науке), (3) ситуацијом и радном активношћу, (4) предиспозицијама личности (учење, стварање, социјалне карактеристике) (Максић, 1993).

По једном другом критеријуму могу се разликовати опште карактеристике даровите личности, даровитост коју појединац испољава у једној области, и специфичне врсте даровитости које се остварују у једној личности.

Дете и даровитост

Даровитост је, да подсетимо, један квалитет личности који повезује особине учења, стваралаштва, мотивације, социјалних интеракција.

Даровитост није појам који је идентичан интелигенцији или, с друге стране, креативности. Интелигенција се мери тестовима и не може се поистоветити са даровитишћу која је далеко сложније понашање. Креативност је оригинално налажење решења за неко искуство или мисаони проблем. Даровитост укључује интелигенцију и креативност, али и нешто више. По мишљењу истраживача да-

ровитости веома је важно да се оцени општа способност и посебне способности даровитог детета и врста мотивације (Ђорђевић, 1995).

Истраживачи овог проблема указали су да постоје две врсте даровите деце. Нека даровита деца показују своје способности у школи. Друга врста даровитости код деце испољава се ван школе – у личном животу или на неким јавним пословима.

Које су особине даровите деце? У истраживањима даровитости указује се на: богатији речник; лако оперисање апстрактним симболима; прихватање дискусије и расправе; смисао за имагинацију; лако откривање сложенијих односа и веза између појава; широка интересовања; јака мотивација за успехом и сазнањем; пластично решавање сложених проблема; упорност у раду; самосталност у мишљењу (Максић, 1998, Ђорђевић, 1995).

Како препознајемо даровите ученике? Деца показују неке високе *способности* лаког и брзог учења. Она су бистра, изузетна у разумевању и решавању проблема. Наравно, способности су различите: интелектуалне, практичне, социјалне, уметничке, спортске, а то значи да се даровитост везује увек за одређену *област* друштвених активности или посебну професију – математика, језик и књижевност, уметност, друштвене науке.

Када је реч о деци онда би требало приметити да су нека деца изузетно способна, али немотивисана. Код друге деце даровитост се манифестује на раном узрасту, а код других касније, у зрелим годинама. За неку децу су важни социјални и породични услови, а за другу нису. Има деце која показују даровитост за један предмет или групу предмета, док за остале предмете показују недаровитост.

Улоге наставника у раду са даровитим ученицима

У овом раду интересује нас питање односа учитеља и наставника у основној и средњој школи према даровитим ученицима. Поред родитеља, школа, односно учитељи и наставници имају пресудну улогу у препознавању (идентификацији) даровитости, у њиховом усвајању основних знања, изградњи вештина, развоју самопоштовања и вере у себе и своје способности у решавању разних проблема. Дакле, које ученике учитељи и наставници препознају у школи као даровите? Какав је њихов однос према деци коју су препознали као даровите?

Улога наставника у односу на даровиту децу била је предмет бројних истраживања. У чему се огледа њихова улога? (1) Наставници би требало да прилагоде образовне садржаје, методе рада, поступке, средства и стил рада даровитој деци; (2) да препознају потребе даровитих и (3) да развијају даровитост.

Три питања истичу посебан значај њихових улога. Прво се тиче облика рада. Наставник се опредељује или комбинује следеће форме: убрзање (акцелерација); обогаћивање програма – наставних садржаја, додатна настава; груписање: хомогено груписање – посебни разреди и груписање у одељењу, изван одељења у слободним часовима; различите комбинације. Издвајање (програм за даровите), убрзавање (прескакање), обогаћивање, (курсеви изван школе).

Друго питање о којем наставник мора да води посебну бригу односи се на потребе даровитих ученика. Његова улога се одређује тако да схвата и прихвата даровите ученике, да их охрабрује у суочавању са изазовима, да истражују, да расправљају и дискутују о разним проблемима, да им шири интересовања.

Трећа улога наставника се огледа у систему подршке развоју самосвести и самопоштовања, развоју потребе за сазнањем, подршка тежњи за постизањем максималних резултата, поштовање других, одговорност према заједници, максималној мисаоној активизацији ученика.

Успешност остваривања ове улоге у директној је вези са карактеристикама наставника који раде са даровитим ученицима. Оне нису коренито другачије од општих карактеристика наставника које су неопходне у настави као што су интелигенција, упорност, залагање, радозналост, критичност. Али, оне се разликују за степен више од општих професионалних особина наставника. Дакле, наставници који раде са даровитим ученицима требало би да поседују професионалне квалитете: (1) да изузетно добро познају свој предмет; (2) да имају високе квалификације; (3) да имају објављене стручне радове и (4) да успешно управљају дискусијама.

Они би, међутим, требало да се разликују од рутинских наставника и по личним квалитетима. Изузетно су способни, одликују се отвореним, флексибилним умом, самопоуздани су и раде на личном и стручном усавршавању, ентузијастички оријентисани (висока мотивација, посвећеност позиву), таленат за успостављање социјалних односа са децом (стрпљење, осетљивост, смисао за хумор, комуникација). Једноставно, наставник који брине о даровитој деци мора да поседује високу интелигенцију, креативност, широка интересовања, професионалне компетенције.

Циљ овог истраживања је стицање увида у то како наставници схватају даровитост ученика, како разликују даровите ученике од недаровитих и какав однос имају према даровитим ученицима. Желели смо да одговоримо на следећа питања: Како наставници разликују даровите ученике од недаровитих? Какав однос наставници имају према даровитим ученицима?

У истраживању је коришћена анкета са питањима отвореног типа. У првом питању се од групе наставника очекивало да наведу како разликују даровите ученике од недаровитих. У другом питању се од групе наставника очекивало да наведу какав је њихов однос према даровитим ученицима.

У даљем тексту прво ће бити приказани резултати истраживања обављеног у основним, средњих стручним школама и гимназијама, а затим тумачења добијених података.

*Приказ резултата из основних школа*Табела 15: *Како разликујете даровите од недаровитих ученика*

Категорије – одговори наставника N=64	Фреквенције	Проценти
Успешније и брже уче и решавају задатке	38	59,37%
Заинтересованији од осталих ученика	29	45,31%
Активнији	23	35,93%
Креативни	14	21,87%
Способност критичког мишљења	13	20,31%
Примењују стечена знања	13	20,31%
Чешће постављају питања	12	18,75%
Самостални	8	12,5%
Траже додатне информације и знања	7	10,93%
Радознали	5	7,81%
Пажљивији	5	7,81%

Табела 16: *Какав је ваш однос према даровитим ученицима?*

Категорије – одговори наставника N=64	Фреквенције	Проценти
Укључује их у додатне активности	21	32,81%
Примењује индивидуализовани приступ	20	31,25%
Стимулише их и мотивише за даљи рад	13	20,31%
Користи похвалу, награду	11	17,18%
Мења очекивања и критеријуме	5	7,81%
Подстиче даровите да помажу осталим ученицима	5	7,81%
Сарађује са родитељима даровитих ученика и стручним сарадницима школе	2	3,12%

Приказ резултата из средњих стручних школа и гимназијаТабела 17: *Како разликујете даровите од недаровитих ученика?*

Категорије – одговори наставника N=21	Фреквенције	Проценти
Успешније и брже уче и решавају задатке	14	66,66%
Заинтересованији од осталих ученика	8	38,09%
Траже додатне информације и знања	7	33,33%
Активнији	6	28,57%
Пажљивији на часу	4	19,04%
Чешће постављају питања	4	19,04%
Самостални	4	19,04%
Примењују стечена знања	4	19,04%

Категорије – одговори наставника N=21	Фреквенције	Проценти
Способност критичког мишљења	3	14,28%
Креативнији, маштовитији	3	14,28%

Табела 18: *Какав је ваш однос према даровитим ученицима?*

Категорије – одговори наставника N=21	Фреквенције	Проценти
Стимулише их и мотивише за даљи рад	5	23,80%
Примењује индивидуализовани приступ	4	19,04%
Мења очекивања и критеријуме	3	14,28%
Подстиче даровите да помажу осталим ученицима	3	14,28%
Користи похвалу, награду	2	9,52%
Разговара са даровитим ученицима	2	9,52%
Упућује их на додатне информације и литературу	2	9,52%

Тумачење резултата

Питање бр. 1 (Како разликујете даровите од недаровитих ученика?) може се разумети и као начин препознавања даровитих ученика?

Одговори учитеља и наставника основних и средњих школа могу се класификовати по следећим критеријумима:

- даровитост је лична способност ученика,
- даровитост се открива кроз наставни процес,
- даровитост је облик социјалне активности.

Одговори учитеља и наставника указују на следеће **личне способности** ученика: радознао, добро се изражава, мотивисан, боље предзнање, заинтересован за нова знања, висока аспирација, истраживачки дух, логички мисли, сналази се у новим сазнајним ситуацијама, креативан, самосталан, критички мисли, амбициозан, упоран. Одговори који су приказани у Табели 15. показују да учитељи и наставници основних школа, као карактеристику даровите деце, на првом месту по учесталости истичу успех у учењу и брзину решавања задатака. Затим следе заинтересованост и активност као опажајни квалитети даровите деце. Креативност и критичко мишљење опажају се на релативно ниском нивоу, а радозналост и самосталност на још нижем. Наставници основних школа наводили су и ове карактеристике даровитих ученика: богат речник, лако схватају правила, добра оријентација у простору, развијен сензибилитет за боје, склоност ка одређеним областима, лако износе своје мишљење, одговори су им садржајнији, имају унутрашњу мотивацију, сналажљиви су, брзо увиђају проблем, способни су да издвоје битно од небитног.

Одговори приказани у Табели 17. показују да и наставници средњих школа на прво место карактеристика даровитих ученика истичу успешно и брзо учење. Са

значајном разликом по учесталости, следе заинтересованост, захтеви за додатним знањем, активност, пажња, самосталност у раду. Способност критичког мишљења и креативност су на последњем месту. Изненађујући је податак да наставници средњих стручних школа и гимназија још мање од основношколских учитеља и наставника запажају креативност ученика као најважнију особину даровите деце.

На основу овакве фреквенције одговора, можемо да закључимо да наставници опажају даровитост више кроз учење (репродукција знања) него кроз креативност као кључни појам даровитости.

Када је реч о **наставном процесу**, даровити се препознају посредством брзог учења, схватања и закључивања. Затим, наводи се систематично излагање, обухватнији одговори, решавање задатака, оригиналан приступ проблему, постижање успеха, повезивање градива из разних предмета.

Социјабилна страна даровитих ученика препознаје се кроз учествовање у дискусијама, расправама, постављању питања, испољавању такмичарског духа.

Способност која се најучесталије појављује у одговорима учитеља и наставника је брзина – брзо уче, закључују и лако решавају задатке.

Шта у овим одговорима недостаје? Нема доживљајне или афективне стране даровитости (два пута се наводи – пажљив). Наставници даровитост препознају као когнитивну способност. А није ли даровито дете и оно које уме да доживи уметничко дело или неку друштвену ситуацију?

Ретко се појављују одговори о вољним особинама као карактеристици даровитости (упоран, амбициозан, добар однос према раду). Из одговора се јасно не може уочити да ли наставници имају свој критеријум за препознавање даровитости. То у питању није тражено али може се препознати.

Да размотримо одговоре на питање бр. 2 (Какав је однос наставника према даровитим ученицима). У литератури је однос наставника према даровитим ученицима испитиван са више аспеката. У овом истраживању, наставници су отвореним одговором указали на три типа наставничког односа: методички, однос према сазнајним потребама даровитих ученика, репертоар развојних техника. На маргини њихових одговора налази се и осврт на унутрашње стање наставника.

Између одговора учитеља и наставника основних и средњих стручних школа и гимназија нема суштинских разлика осим у учесталости појављивања неких врста односа наставника према даровитој деци. Одсуство укључивања у додатне активности на листи одговора средњошколских наставника упадљива је разлика.

Када је реч о *облицима рада* са даровитом децом најучесталији одговори су – давати теже (захтевније) задатке, додатна настава и индивидуални рад, диференцирани задаци. Потом следе – секције, укључивање у пројекте, обogaћивање знања, упућивање на додатну литературу, укључивање у пројекте, ваннаставне активности. Један одговор се односио на рад у хомогеним групама.

У погледу задовољавања *потреба* даровитих ученика на првом месту су похвале и награде даровитих ученика. Потребе ових ученика задовољавају се и укључивањем у дискусију, охрабривањем, јачањем мотивације, подржавањем, поштовањем и уважавањем.

У овом делу одговора мора се указати и на одговоре учитеља и наставника који су доводили у везу даровите и мање даровите или недаровите ученике. Тако, поред прилагођавања наставе способностима сваког ученика, наставници од даровитих ученика очекују да помажу слабијим ученицима.

Подршка *развоју* даровитих није усмерена на издвајање (програм за даровите), убрзавање (прескакање) и обогаћивање програма (курсеви изван школе). Она углавном обухвата репертоар морално-емоционалне подршке – подстицање на још успешнији рад, давање упутстава, помоћ у надоградњи знања, припрема за такмичење, указивање на позитивне примере, сарадња са породицом, упућивање на литературу, извлачење максимума из ученика.

Недостаје питање како наставници виде своје карактеристике у раду са овом категоријом ученика. Неки налази су концентрисани на високе стручне квалификације наставника (Ђорђевић, 1990). То је логична веза између наставника који одлично познаје свој предмет и даровитог ученика. Једнако су важни, међутим, и ставови наставника према даровитости. Тако, могуће је да су неки заинтересовани, други равнодушни и индиферентни, а трећи одбојни.

Одговори наставника у нашем узорку афирмативно су опредељени према даровитости. Тако, у неким одговорима они осећају задовољство, имају стрпљења, толерантни су, вероватно имајући у виду и однос према мање даровитој или недаровитој деци. Њихова очекивања су позитивна, мотивисани су за рад са даровитим ученицима.

Резултате овог истраживања можемо упоредити са резултатима истраживања које је обавила Славица Максић (1998:132), а које показује да наставници у опису даровитих ученика рангирају следеће варијабле – способности (79,3%), постигнуће (60, 9%), учење (39,1%), мотивација (29,9%), креативност (35,6%), особине личности (14, 9%). Указује се још на оне карактеристике које се везују за област даровитости (50,6%) и релативни критеријум поређења (97,7%).

Поступком отворених питања, у нашем испитивању, учитељи и наставници на прво место описивања истичу варијаблу успешно и брзо учење, потом интересовање, активност (мотивација), способност, креативност.

Као што се види разлика је у следећем. Наши испитаници су више истицали успешност учења, као основне карактеристике даровитости, а затим заинтересованост што може да значи и мотивисаност. Способност, која се овде везује за критичко мишљење, је на петом месту код учитеља и наставника основне школе, а у средњим школама на деветом месту. Постигнуће се не помиње јер се ваљда подразумева.

Како објаснити разлику о којој је реч? Она проистиче или из неуједначених методских поступака или из разлога што учитељи више верују да је даровитост производ рада него генетских фактора (природни дар).

Предност упитника са питањима отвореног типа је у томе што обезбеђује одговор из искуства, односно из практичног знања наставника. У том одговору долази до изражаја наставникова пракса, а у упитнику са унапред понуђеним одговорима испољава се више његова формална, школска квалификација.

Овакав закључак потврђују одговори родитеља ученика и наставника о пореклу даровитости. Док су ученици и родитељи дали предност урођености, наставници су једнако ценили варијабле урођености, учења и интеракционизма (Максић, 1998:135).

Закључак. Наставници углавном опажају и оцењују даровите ученика кроз таленат за поједине предмете (најчешће предмет који они предају). Даровитост се препознаје као когнитивна способност ученика (лако и брзо учење). Не опажа се култура (уметност) као даровитост, као ни моторичка (спорт, практичан рад), вољно-морална (алтруизам-егоизам) и социјабилна даровитост (успостављање контаката, лидерство). Вешта и лака употреба језика (вербална способност) ретко се појављује у одговорима наставника. У одговорима наставника није издвојена даровитост за оно што Вилхелм Дилтај (1980) подразумева под категоријама живота (живот, доживљај, значење, вредности). Проблем даровитог ученика за вредности је нешто што истраживања не могу да региструју. Наставници и учитељи се више ослањају на природни дар деце него што се баве »производњом« даровитих.

Наше истраживање показује да наставници не разликују довољно когнитивне, интелектуалне, уметничке и социјалне даровитости ученика.

Одговори су добијени без унапред понуђених одговора. Значај одговора на ово питање огледа се у томе што из њих проговара искуство, а не нормативна упутства. А искуство у учионици је изузетно значајно. Откривамо праксу, а не програмирани одговор.

Литература

- Дилтај, В. (1980): *Изградња духовног света у историјским наукама*. Београд: БИГЗ.
- Ђорђевић, Б. (1995): *Даровити ученици и (не)успех*. Београд: Заједница учитељских факултета.
- Ђорђевић, Ј. (1990). *Интелектуално васпитање и савремена школа*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Карлаварис, Б., А. Барат и Е. Каменов (1988): *Развој креативности у функцији еманципације личности путем ликовног васпитања*. Београд: Просвета.
- Максић, С. (1993): *Како препознати даровитог ученика*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
- Максић, С. (1998): *Даровито дете у школи*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
- Милс, Р. (1998): *Елита власти*. Београд: Плато.
- Моска, Г. (1969): О владајућој класи, у Т. Парсонс, Е. Шилс, К. Негел, Џ. Питс, *Теорије о друштву: основи савремене социолошке теорије*. Београд: „Вук Караџић”.
- Попер, К. (1994): *Отворено друштво и његови непријатељи*. Београд: БИГЗ.

Zoran Avramović, Ph. D., Milja Vujačić, Belgrade

TEACHERS' ATTITUDES TOWARDS GIFTED STUDENTS

Summary

The article deals with the notion of giftedness. The authors proceed from an assumption that the notion of giftedness could be related to elite social theory. The relationship between the elite and giftedness has become current in modern society, primarily in market economy, as a concept that develops from individual entrepreneurial abilities. In the second part of the article, the notion of giftedness is discussed in the context of school and teachers' role in teaching gifted children. The article presents and analysis the research results obtained in several primary schools, secondary vocational schools and grammar schools in Serbia. The basic research questions are the following: how teachers differentiate between gifted and inept students, and what sort of attitudes exists towards gifted ones. The results show that teachers mainly recognize and evaluate gifted students through their aptitude for certain school subjects. The teachers mainly rely on children's natural gift and fail to stimulate them. Our research shows that teachers fail to emphasize cognitive, intellectual, artistic and social aspects of gifted students.

Key words: giftedness, elite, gifted students, teachers, school

Д-р Зоран Аврамович, Миля Вуячич, Белград

ОТНОШЕНИЕ УЧИТЕЛЕЙ К ОДАРЁННЫМ УЧЕНИКАМ

Резюме

В настоящей работе авторы рассматривают понятие одарённости. Авторы исходят из предположения, тезиса, что понятие одарённости можно привести в связь с элитарной теорией общества. Проблема элиты и одарённости стала актуальной в современном обществе, прежде всего в рыночном хозяйстве, концепте исходящем из предпринимательских способностей индивида. Во второй части работы понятие одарённости авторы рассматривают в контексте школы и роли учителя в работе с одарёнными детьми. Они дают обзор и анализ результатов полученных в исследовании в начальных и средних специальных школах и в гимназиях в Сербии. Основные исследовательские вопросы из которых исходят авторы следующие: каким образом учителя отличают одарённых учеников от неодарённых и какое их отношение к одарённым детям. Результаты указывают на то, что учителя главным образом замечают и оценивают одарённых учеников

через их талант к определённым предметам. Преподаватели и учителя больше опираются на природную одарённость детей, чем сами побуждают их. Наше исследование указывает на то, что преподаватели и учителя не подчёркивают достаточно когнитивные, интеллектуальные, искусственные и социальные аспекты одарённости учеников.

Опорные слова: одарённость, элита, одарённые ученики, учителя, школа

ПУТ КА ИНОВАТИВНОМ НАСТАВНИКУ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Резиме

Предмет рада фокусиран је на теоријски приказ значаја иновативног наставника који служи као потпора ученицима при креирању подстицајне атмосфере за рад приликом усвајања нових информација и сазнања. Приказана је настава као процесни систем који има потребу за мењањем у складу са најновијим техникама и методама рада. Наставник као иновативни представник преузео је улогу моделовања наставних јединица усклађених са потребама знања и ученика. У раду се указује на значај педагошког умења наставника које се дешава упоредо са стицањем знања, вештина и навика ученика. Посебан значај огледа се и у крајњим исходима – резултатима васпитно-образовног рада, који као позитивни продукти изнова рађају потребу за стварањем нових иновација.

Кључне речи: иновативна настава, иновативни наставник, педагошко деловање, унапређење наставе

Појам знања одувек је био у жижи интересовања стручњака који се баве на директан и индиректан начин образовањем. Мисао да у данашњем времену друштвена знања имају улогу покретача економског и друштвеног развоја довољно указује на значај примене иновативног модела наставника који би своје способности требало да несебично примењују при реализацији васпитно-образовног процеса у основној школи. Бројни су показатељи који показују да су друштва заснована на знању, тзв. „економије и друштва која се директно заснивају на производњи, дистрибуцији и употреби знања и информација (OECD, 1996) успешнија у глобалној привредно-економској утакмици. По правилу развијене земље знатно више улажу у образовање становништва, или економским језиком речено, у људске ресурсе.

Тако су из диференцијалних дисциплина изведени веома коришћени појмови „трансфер знања“, „друштво знања“, „економија заснована на знању“ и

слични, чија се основа за критичко мишљење формира још у основној школи, а свакако је условљена личношћу наставника. У Републици Србији неколико година уназад пракса да се покрећу и организују посебне врсте семинара који имају за циљ охрабривање наставника за усвајање нових теоријских и практичних знања и умења. Школе у Србији препознале су значај даљег стручног усавршавања наставника, тако да своје запослене углавном усмеравају на обавезне или изборне програме – семинаре где се појављују бројни представници као организатори, од владиних институција, преко невладиних до струковних удружења и организација. Министарство просвете и спорта, Београд – Завод за унапређење образовања и васпитања једном годишње издаје Каталог програма стручног усавршавања запослених.

Поставља се питање, ако се учење одвија током целог живота, која су то основна знања која деца треба да стекну још у основној школи? Како треба да изгледају наставници као примарни преносиоци знања и умења у школама? Да ли су они увек позитивни примери ученицима? Шта учинити да се стање побољша у школама? Позната је чињеница да стручњаци, који су уско везани за одређене стручне области не показују довољно знања и умења у процесу преношења знања која су дефинисана наставним плановима и програмима. Програми који се слушају на наставничким и васпитачким школама јесу обухваћени општим педагошким принципима и техникама, али нису у довољној мери контекстуализовани и смештени у оквире методике наставе предмета који је у фокусу интересовања. Тако долазимо до кључног проблема који упућује на неминовност решавања истог.

Како организовати наставу да буде прихватљива, схватљива и у исто време усвојена са облицима рада и активностима најпогоднијим за извођење? У томе и постоји јаз међу теорије – онога што се учи током образовања за струку и праксе, тј. делатности обухваћене знањем неопходним за успешно реализовање. Морамо се сложити са тим да је делимични разлог томе концепција образовања наставе која фаворизује теоријска сазнања на штету процедуралних. Теоријска знања обично су декларативна, апстрактна и концептуална, док практична делатност захтева процедурална, специфична и прагматична знања и способности. Насупрот теоријским знањима, овакво знање које се стиче практичним искуством није кодификовано и често остаје неизречено, јер настава је једна од професија у којој најбоља остварења остају невидљива. Неоспоран је значај запажања стицања практичног искуства у којима се дешавају трансформације теоретских сазнања заједно са интеграцијом знања која наставници стичу током наставничке праксе.

Осврнимо се на пређашње реформе у образовању и на основу речи курикулум који је детаљно садржавао циљеве, исходе, карактеристике ученика, начине оцењивања учења, наставне садржине, средства и методологију рада.

У пређашњем школском систему у Републици Србији, до 2001. године нагласак је стављан на садржину курикулума, онога што се на часовима и активностима обрађивало где су главни приоритети били обрада планираних

наставних планова и програма. Друга крајност је реформа која је наглашавала битност исхода – оног што желимо да ученици поседују након похађаног курса или програма. Значи, концепт гледишта се променио. Тада су уследиле партиципације знатног броја учесника, и то на свим нивоима образовног система остављајући поруку да је образовање неодвојиви сегмент друштвене заједнице. Развој се одвијао у четири фазе: од припремних активности, преко израде курикулума, па све до имплементације и евалуације. Предмет евалуације одређивао се у зависности од циљева који се желео постићи. Популарно речено и веома фреквентно у свакодневној наставничкој комуникацији су „исходи“ програма, тј. знања и умења која су ученици стекли као резултат примењеног програма. Међутим, Лонг (1984: 409) истиче да се евалуација може фокусирати не само на производ већ и на процес извођења програма. С тим у вези, првом начину евалуације значајан је крајњи показатељ евалуације, док другој, чији је предмет процес, угао посматрања су чиниоци који доприносе постизању циља. Споран је удео наставника који се налази негде између, као спрега, која повезује знање са крајњим реципијентима тј. корисницима сазнања.

Значајне карактеристике наставних иновација

Markee N. (1997) анализирао је како се успех може обезбедити од самог почетка настајања промене. Дошло се до закључка да су за позитивне резултате неминовне одређене карактеристике курикуларне иновације:

Увереност у предност иновације – јавља се само у случајевима ако иновативни корисници: деца, родитељи, наставници и шира друштвена заједница виде у иновацији свој лични развој у професионалном и економском или неком другом смислу.

Усклађеност са претходном праксом – усвајају се лако иновације које су нове, али не са превише преокрета. Ниједна крајност није добра, нити иновације које су сувише сличне или превише различите од старог наставног плана и програма.

Умерена комплексност иновације – што се ученицима иновација чини компликованијом и комплекснијом то је мања вероватноћа да ће бити прихваћена од корисника, тј. деце. Али, уколико постоји веровање у предност иновације у односу на стари модел у том случају лакше се прихвата и сложенија иновација која захтева промене.

Могућност тестирања иновације – тиме се пружа могућност да се на неки начин стави на пробу, или „иновативни субјекта“ или „објекта“ и на тај начин буде видљив процес одигравања – корак по корак. Такве иновације имају већу шансу за успехом, насупротив новинама које се усвајају одједном.

Видљивост иновације – иновације које су препознатљиве брже се преносе усвајају и у ширем окружењу, него оне чији су резултати мање видљиви.

Као што се види из претходно изложеног прихватање је значајан чинилац, као и начин на који се перципирају сви елементи укључени у иновативни процес.

Приликом праћења видљивости иновације посебно се обраћа пажња на реакције циљне групе над којом се изводи иновативни поступак.

Кључни појмови који одређују иновативни рад наставника

Нема наставника којем није позната позитивна емоција задовољства након успешног радног дана, или часа, добре комуникације са дететом, одељењем, неке врсте полета које покреће изнова енергију. Насупрот њих су, нажалост, честе и негативне емоције које се манифестују љутњом, анксиозношћу, психичким повредама, грижом савести које настају као последице преоптерећености, недисциплине у одељењу, превеликог броја ученика, лоших услова рада, нарушених међуљудских односа у школи, или ради увођења новина у раду чије савладавање захтева велико улагање и додатни напор. Тако је и са емоцијама (Коестлер, 1967: 226) које су саставни део наставног процеса, дефинисане као „ментална стања праћена интензивним осећањима и телесним променама”. Опште је прихваћено да наставници треба да поседују интуицију, разумевање, одишу ентузијазмом и оптимизмом... Наставници почетници се често држе научених теорија и оквира, у бојазни су за одступањима од теоријских приказа и из тог разлога пружају и показују несигурност у сусрету са новим и неочекиваним ситуацијама које су неминовне у учионици. Просто се намеће потреба за изучавањем природе знања које поседују компетентни, успешни и у исто време искусни наставници. Какво је то знања која они поседују и да ли се она стичеу током похађања различитих курсева на факултетима или искључиво се процесуирају кроз наставничку праксу? У студији о основама наставничког знања Шулман (Schulman, 1987) разликује следеће категорије које значајно дистанцирају иновативног наставника од наставника који није спреман на промене. Неке од карактеристика су:

1. познавање садржине предмета,
2. поседовање општих педагошких знања,
3. знање о курикулуму,
4. педагошко знање предмета,
5. знање о ученицима и
6. знање о образовном контексту.

По Шулмановом мишљењу то је модел педагошког резоновања и деловања који се одвија у више фаза и циклуса. Овде можемо замислити рашчлањивање скупа сазнања – материје које се обрађује у наставном процесу и расплитање тока са циљем разумевања материје. Наставни поступци који помажу наставнику су и следећи:

- трансформација материје како би је ученици могли усвојити уз примењивање следећих поступака: припрема (анализа и тумачење текста, подела на сегменте, појашњавање циљева), представљање материје у виду аналогije, метафоре, примера, демонстрације, објашњења, избор поступака у настави (предавање, кооперативно учење, дијалогска метода, учење путем открића, рад на пројекту), прилагођавање каракте-

ристикама ученика (разматрање делова или појмова који би ученицима били тешки за усвајање), узимајући у обзир претходно знање, узраст, способности и интересовања ученика, одељења и других чинилаца, тј. обликовање материје и наставног поступка који одговарају одељењу,

- посматрање кроз организацију и управљање радом у учионици, давања објашњења, вођења дискусије, модерирања групног рада и рада у пару, одржавања радне дисциплине и подстицања мотивације.

Након изведене наставе, процес се даље усмерава на ретроспективне поступке. Кроз евалуацију – проверу разумевања, тестирања усвојеног знања, процене свог рада, рефлексije – критичке анализе свог и рада ученика, ново разумевање – материје која се предаје, ученика, природе наставе и себе.

Претходно наведено нам указује на свеобухватну комплексност неопходних знања за наставнички позив и потребу да се будућа концепција образовања наставника, кроз институционалне и ванинституционалне видове образовања и усавршавања притупи са подигнутом свешћу шта је све неопходно за квалитетан наставнички рад. Управо процес наставе нас опомиње да се запитамо о општијим питањима, као што је карактер знања, или питање селекције знања у времену када се нова знања вртоглавом брзином појављују и акумулирају у свим областима проучавања.

Оно што је заједничко и за једне и за друге, јесте да се позитивне емоције рађају на основу наставничког успеха и успеха ученика, које се аутоматски присвајају и за подухвате школе. Тај феномен нарочито је присутан и видљив код талентованих ученика где се похвале, плакете и медаље уручују и наставницима. Управо су то иновативни наставници које своје место утемељују тако што најбоље могуће изводе наставни процес који је на тај начин сигурна подлога за стварање „иновативног знања и умења“.

Литература

- Ивић, И., Пешикан, А. & Андрић, С. (2001). Активно учење, Приручник за примену методе активног учења – наставе. Друго издање. Београд, Институт за психологију.
- Hochschild, A. R. (1993). *The managed heart: The commercialization of human feeling*, Berkeley, University of California Press.
- Koestler, A. (1967). *The ghost in the machine*, London, Hutchinson.
- www.unicef.org
- Schon, D. (1983). *The reflective practitioner, How practitioners think in action*, San Francisco: Jossey Bass.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching, *Harvard educational Review*, 57 (1), 1-22.
- OECD, (1995). *The knowledge based economy*, www.oecd.org
- OECD, (1996). *The knowledge based economy*, www.oecd.org
- Dunham, J. (1992). *Stress in teaching*, London, Routledge.

- Long, M. (1984). Process and product in ESL program evaluation TESOL Quarterly, 18.
- Markee, N. (1997). Managing curricular innovation, Cambridge: Cambridge University Press.

Violeta Petković, Novi Sad

TOWARDS INNOVATIVE TEACHER IN PRIMARY SCHOOL

Summary

The scope of the article is on the theoretical review of the significance of innovative teacher who is a great support for students while creating an inspiring working atmosphere. The article presents the teaching activity as a system of procedures reflecting a need for change according to the state of the art techniques and methodology. Teacher, as an innovator, is modelling teaching units, thus they are harmonized with students' needs and knowledge. The article points out the significance of teachers' pedagogical skills which have been gained along with obtaining students' knowledge, abilities and habits. Special importance has been recognized in the final results – the outcome of the educational work, which has become a positive sequel initiating a constant need for new innovations.

Key words: innovative teaching activity, innovative teacher, pedagogical work, teaching activity advancement

Виолета Петкович, Новый Сад

ДОРОГА К НОВАТОРСКОМУ УЧИТЕЛЮ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Резюме

Предметом настоящей работы является теоретический обзор значения новаторского учителя, преподавателя, который является опорой ученикам в креации побудительной атмосферы в работе в течение усвоения новых информации и знаний. В работе представлен процесс обучения как процессуальная система, требующая изменения согласно новейшим техникам и методам работы. Преподаватель, учитель как новаторский представитель взял на себя роль моделирования учебных тем согласованных с потребностями знаний и учеников. В работе автор подчёркивает значение педагогического умения учителя, которое проявляется наряду с усвоением знаний, умений и навыков учеников. Особое значение

стражается и в конечных результатах воспитательно-образовательной работы, которые как положительные результаты вновь возрождают необходимость формирования новых новаторств.

Опорные слова: новаторский процесс обучения, новаторский учитель, педагогическая деятельность, усовершенствование процесса обучения

Др Драгослав Херцег

Др Ђорђе Херцег

Природно-математички факултет

Нови Сад

UDK 371.3::51]:004

UDK 373.5:[371.214::519.6

Оригинални научни рад

25. XII 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 897–908

ИНТЕРПОЛАЦИЈА И GEOGEBRA

Резиме

У настави математике, посебно нумеричке математике, обрађују се теме које се односе на обраду емпиријских података и апроксимацију функција. Као најједноставнија појављује се полиномна апроксимација. Она служи и као основа за нумеричко диференцирање, нумеричку интеграцију и нумеричко решавање обичних диференцијалних једначина. Прављење програмских рутина за интерполацију не би требало да буде тешко, али ученици ипак праве бројне омашке. Употребом рачунара у настави, визуелизацијом и поједностављивањем процедура за рачунање потребних података постижу се знатна побољшања у прихватању појма интерполационог полинома и израчунавању приближних вредности помоћу њега. На основу искуства у раду са ученицима Гимназије „Јован Јовановић Змај” из Новог Сада, и студентима математике и информатике Природно-математичког факултета у Новом Саду, излаже се један могући прилаз обради теме интерполације. Опишта запажања поткрепљена су резултатима тестова који су рађени са ученицима више генерација.

Кључне речи: настава математике, нумеричка математика, рачунари у настави

Увод

У настави нумеричке математике примери су чести. Да би се неки пример урадио до краја обично је потребно много рачунања. У већини случајева када се решавају задаци нумеричке математике да би се добио коначан резултат потребно је решавати проблеме који су у другим наставним јединицама појављују самостално. На пример, оцена апсолутне вредности неког извода посматране функције на датом интервалу. Овде је потребно прво наћи извод одређеног реда, затим анализирати и оценити апсолутну вредност тог извода. Такве активности које су само помоћне у

решавању посматраног проблема могу гурнути у други план идеју коју би пример или задатак требао да приближи ученицима. Ученици обично немају много воље да се баве дуготрајним рачунањима, поготово са „незгодним бројевима“, који имају више децимала. Зато нерадо раде и домаће задатке из нумеричке математике. На контролним и писменим задацима испољава се иста или веома слична одбојност према дужим рачунањима. Да би овакве ситуације биле ређе или да бисмо их елиминисали, покушали смо да одређеним припремама поједноставимо помоћни рад у решавању нумеричких задатака. У ту сврху смо припремили неколико GeoGebra апликација и алата, које ученицима пружају шансу да више времена и пажње посвете суштини задатка који решавају. Прво смо посматрали нумеричко решавање једначина, затим нумеричку интеграцију, а у овом раду приказујемо помоћ коју смо ученицима припремили за савладавање градива из интерполације.

Интерполација се појављује као значајна тема у настави нумеричке математике. За обраду ове теме наставним планом предвиђено је 16 часова. Прва наставна јединица се односи на егзистенцију интерполационог полинома, грешку и оцену грешке интерполације, ако се интерполационим полиномом апроксимира функција.

О егзистенцији интерполационог полинома

У разматрању услова егзистенције интерполационог полинома примери и апликације израђене у GeoGebra могу бити од помоћи. Ученици могу самостално или у сарадњи са наставником да експериментишу и откривају те услове.

Као увод у интерполацију обично се посматра конкретна табела следећег облика

k	0	1	2	...	$n-1$	n
x_k	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y_k	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Затим следи питање да ли је могуће наћи функцију која ће за задате вредности x_k имати задате вредности y_k за свако $k = 0, 1, \dots, n$. Потом се проблем поједностављује тиме што се жељена функција тражи у скупу полинома. Прецизна формулација питања полиномне интерполације може се исказати на следећи начин:

Да ли постоји полином $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ за који важи $p(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$?

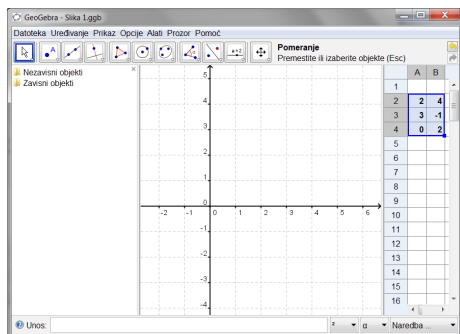
Ако постоји, овај полином називамо *интерполациони полином*. Уређене парове (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$, називамо *чворне тачке*, *апсцисе тих тачака*, тј. бројеве $x_0, x_1, \dots, x_n$ називамо *чворови интерполације*. Пре него што се исказе одговарајућа теорема и да њен доказ, помоћу GeoGebra можемо створити ситуацију која ученицима омогућава мали експеримент на основу којег могу наслути-ти довољне услове за егзистенцију интерполационог полинома.

Нека је дата табела

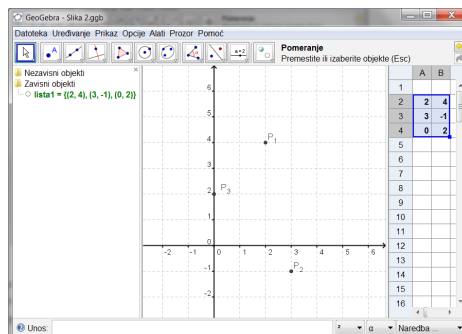
k	0	1	2
x_k	2	3	0
y_k	4	-1	3

Бројеве из ове табеле уносимо у табеларни приказ, Слика 1.

Затим селекујемо табелу и десним кликом изаберемо опцију *Napravi listu tačaka*. Тако добијамо у геометријском приказу тачке P_1 , P_2 и P_3 , а у алгебарском приказу добијамо скуп чворних тачака $\{\{2, 4\}, \{3, -1\}, \{0, 3\}\}$ под именом lista1, Слика 2.

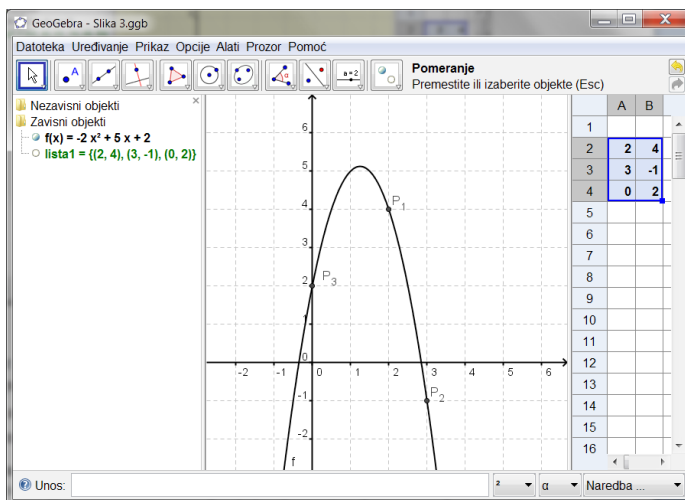


Слика 1.



Слика 2.

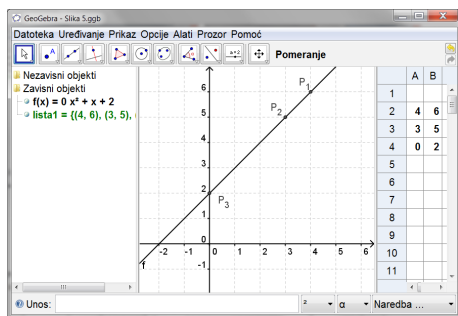
Да ли за посматрану табелу постоји полином другог степена p_2 са особином $p_2(2) = 4$, $p_2(3) = -1$, $p_2(0) = 3$, можемо проверити наредбом $Polinom[P_1, P_2, P_3]$, слика 3.



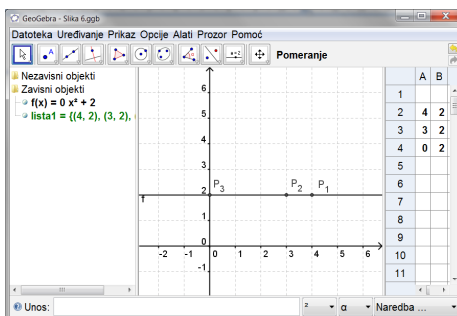
Слика 3.

После сваког од померања неке од посматраних тачака, од ученика се тражи да опишу новонасталу ситуацију у погледу постојања полинома. Пажњу им можемо усмерити на посматрање табеле у табеларном приказу, на посматрање листе `lista1` у алгебарском приказу или на посматрање графика у геометријском приказу. При овим посматрањима нагласак је на уочавању међусобног односа тачака P_1 , P_2 и P_3 када полином није дефинисан. На основу искуства стеченог у раду са ученицима, закључујемо да ученици врло брзо откривају да полином није дефинисан када бар две од посматраних тачака имају једнаке апсцисе.

Вертикалним померањем посматраних тачака P_1 , P_2 и P_3 (апсцисе им остају исте и међусобно различите) могу се створити ситуације када полином постоји, али је степена 1 или 0. На пример, $P_1 \rightarrow (4,6)$ и $P_2 \rightarrow (3,5)$ дају полином првог степена, слика 5, а $P_1 \rightarrow (4,2)$ и $P_2 \rightarrow (3,2)$ полином нултог степена, Слика 6.



Слика 5.



Слика 6.

Закључак који очекујемо од ученика је следећи.

Ако су апсцисе посматраних тачака P_1 , P_2 и P_3 међусобно различите, увек постоји интерполациони полином одређен тим тачкама. Тај полином може бити степена два, један или нула.

Претходна разматрања са три тачке можемо заменити посматрањем ситуације када имамо четири или више тачака. За то је довољно претходу табелу допунити новим паровима и поновити поступак одређивања интерполационог полинома. Закључак о постојању интерполационог полинома и одређивање његовог сам се намеће. Тако долазимо до теореме коју је потребно доказати.

Ако чворне тачке (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$ имају међусобно различите апсцисе, тј. ако су бројеви $x_0, x_1, \dots, x_n$ међусобно различити, онда постоји један и само један интерполациони полином одређен тим чворним тачкама. Степен тог полинома је мањи или једнак n .

Грешка интерполације

Ако је позната функција f и ако је $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$ онда интерполациони полином p одређен чворним тачкама (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$, називамо

интерполациони полином функције f . Разлика $f(x) - p(x)$ је грешка интерполације. За грешку интерполације важи следећа теорема.

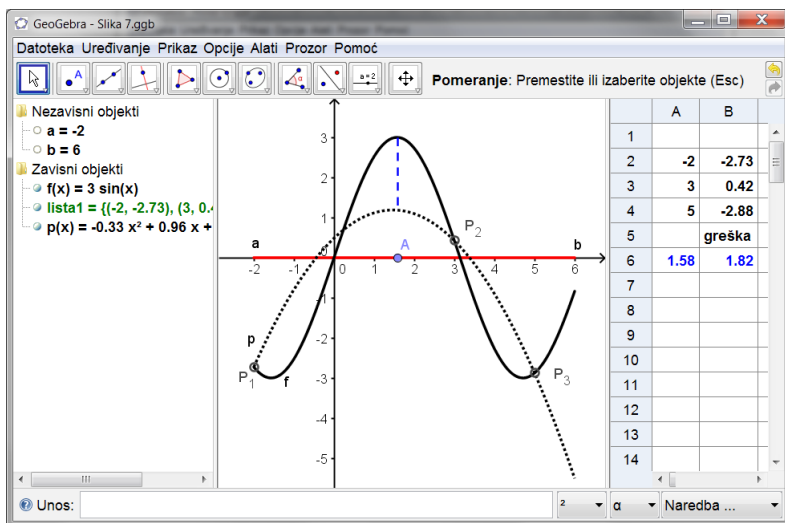
Ако је функција f $(n+1)$ -пут непрекидно диференцијабилна на интервалу $[a, b]$ и ако су бројеви $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \dots, n$, међусобно различити, онда за свако $x \in [a, b]$ постоји $\alpha \in [a, b]$ такво да је

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

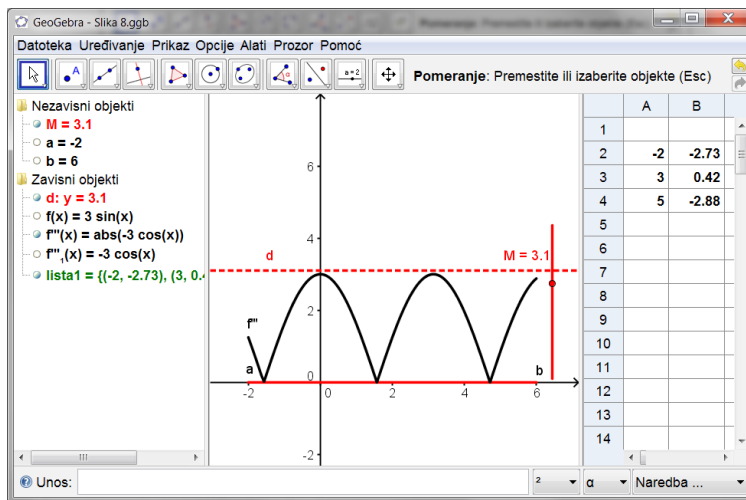
Грешку интерполације посматрамо или као разлику $f(x) - p(x)$ у интервалу $[a, b]$ или ту разлику оцењујемо и тражимо број M такав да важи $|f(x) - p(x)| \leq M$ за конкретно $x \in [a, b]$ или за било које $x \in [a, b]$.

Када само посматрамо разлику $f(x) - p(x)$ у интервалу $[a, b]$ лако се може креирати ситуација приказана на слици 7. Померањем тачке A по интервалу $[a, b]$ посматрану разлику видимо у геометријском приказу као испрекидану вертикалну дуж, а њену дужину читавамо у табеларном приказу (колона B, испод речи greška). У овом случају колона A у истој врсти садржи апсцису тачке A, тј. број x за који се тражи грешка.

Ако тражимо број M такав да важи $|f(x) - p(x)| \leq M$ за конкретно $x \in [a, b]$, потребно је да на интервалу $[a, b]$ оценимо $|f^{(n+1)}(s)|$ док $s \in [a, b]$ и да израчунамо $|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ за изабрано $x \in [a, b]$. На слици 8 приказана је ситуација када је $f(x) = 3 \sin(x)$, $n = 2$, а чворне тачке су задате у табеларном приказу. Померањем тачке M на вертикалној линији померамо и хоризонталну праву d . Када смо сигурни да је график функције $|f^{(3)}(x)|$ испод праве d , можемо прочитати колико је тражено M .



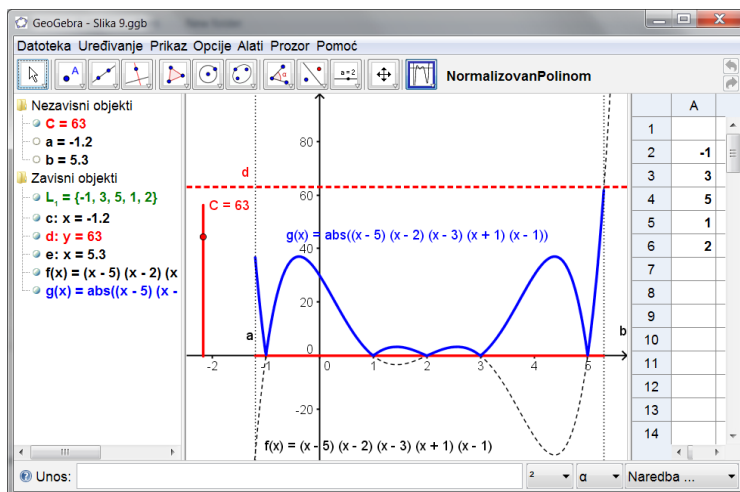
Слика 7.



Слика 8.

Ако тражимо број M такав да важи $|f(x) - p(x)| \leq M$ за било које $x \in [a, b]$, потребно је да на интервалу $[a, b]$ оценимо $|f^{(n+1)}(s)|$ док $s \in [a, b]$ и да оценимо $|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ за $x \in [a, b]$. Први део задатка обављамо као и у претходном случају, а други ћемо сада описати.

Да бисмо одредили константу C са особином $|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \leq C$ за $x \in [a, b]$ потребно је из табеле где су дате чворне тачке издвојити апсцисе тих тачака и дефинисати полином $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Када је у питању већи број чворних тачака или када су бројеви задати са више децимала, пожељно је избећи поновни унос тих бројева.



Слика 9.

У табели се селекују апсцисе чворних тачака и од њих прави листа. Од ове листе се у једном потезу добија полином q помоћу алата *NormalizovanPolinom*, слика 9, који смо направили. Улазни податак за овај алат је листа чворова интерполације, а излазни резултат је полином q . Оцена функције $|q(x)|$ на интервалу $[a, b]$ спроводи се исто као што смо оцењивали апсолутну вредност извода, што је већ описано.

Експеримент

Наставу нумеричке математике изводимо са ученицима четвртог разреда Гимназије „Јован Јовановић Змај” из Новог Сада са два часа недељно. Настава се одвија у рачунарској учионици и сваки ученик сам ради на једном рачунару. Увек укратко понављамо са ученицима теоријски садржај, а затим ученици решавају конкретне задатке. При томе смо користили програмски пакет *Mathematica*, анимације и материјал приложен на посебном CD-у уз наш уџбеник Нумеричка математика, Stylos, Нови Сад, 2003. Школске 2009/10. године поред *Mathematica* користили смо и GeoGebra апликације описане у овом раду. После обраде наставне јединице ученици су радили један тест.

Ученике који су школске 2009/10. године радили тест из интерполације обележићемо као прву групу. Другу групу чине ученици који су тестове радили 2006/07, 2007/08. и 2008/09. школске године. Школске 2006/07. године наставу смо држали у две подгрупе истог одељења.

Резултате теста прве групе упоредили смо са резултатима друге групе, када је настава држана на класичан начин. Задаци на свим тестовима били су слични, тј. то су биле варијације на тему интерполације. Типични задаци са тестова су следећи:

1. Нека су дати парови (a, A) , (b, B) , (c, C) реалних бројева. Под којим условима постоји полином p са особинама $p(a) = A$, $p(b) = B$, $p(c) = C$?
За податке из табеле одреди интерполациони полином и напиши га у облику $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
2. Са каквом тачношћу се може израчунати $\ln 4$ помоћу интерполационог полинома трећег степена за функцију $\ln x$ ако су чворови интерполације 2, 3, 5, 6?
3. За функцију $f(x) = \cos(x)$ одредити интерполациони полином другог степена са $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3$ и оцени грешку интерполације на интервалу $[x_0, x_2]$.
4. Дати су функција $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$ и чворови интерполације -0.4, -0.3, 0.1, 0.4. Помоћу интерполационог полинома $p_n(f, x)$ одреди приближну вредност за $f(0)$ и стварну грешку.

Тест у оквиру прве групе радило је 16 ученика и њихова просечна оцена је била 4.31. Просечне оцене добијене на тестовима друге групе приказане су у следећој табели.

	Друга група група	
	Број ученика	Просечна оцена
2006/07.	14	3.64
2006/07.	14	3.57
2007/08.	17	3.59
2008/09.	20	3.50
Збирно	65	3.58

Применом студентовог теста тестирана је нулта хипотеза да не постоји статистички значајна разлика у средњој оцени посматране две групе. Статистичком обрадом резултата теста добили смо следећу табелу.

	<i>I група</i>	<i>II група</i>
Број	16	65
Аритметичка средина	4.3125	3.58462
Стандардна девијација	0.946485	1.33337
Минимум	2.0	1.0
Максимум	5.0	5.0

Интервал поверења за I групу је 4.3125 ± 0.504347 , тј. $[3.80815, 4.81685]$, а за II групу 3.58462 ± 0.330394 , тј. $[3.25422, 3.91501]$. Користили смо t -тест за упоређивање средина. Одговарајућа t -вредност је $t = 2.05527$, па је $p = 0.0431576$. Како је добијено $p < 0.05$, то са поузданошћу од 95% одбацујемо нулту хипотезу и сматрамо да постоји статистички значајна разлика у просечним оценама, тј. прва група има статистички значајно већу оцену.

Закључак

Код упознавања са вишом математиком ученици доживљавају многе тешкоће, јер прелазе са индуктивног на дедуктивно проучавање, где се појмови формално дефинишу, а њихове особине се изводе логичком дедукцијом. Истраживања показују да је боље кренути од простијих идеја и постепено ићи ка сложенијим. У радовима Talla наводе се два начина обраде математичких појмова: концепт слике и концепт дефиниције. Концепт слике обухвата целокупну когнитивну структуру повезану са неким појмом. Овде се мисли и на мисаоне моделе и слике и све спознајне процесе формиране на основу искуства са стварима и објектима. Концепт дефиниције се приказује као начин да се помоћу речи и симболички представе одређени појмови.

При прихватању новог математичког појма, боље је ићи од конкретног и једноставнијег ка сложенијем и апстрактнијем. Визуелизација појмова који се уводе или обрађују у комбинацији са симболичким записима и дефиницијама вероватно је најефикаснија. Рачунарске апликације могу приказати поред примера концепата и примере математичких процеса кроз динамичку акцију. Тако рачунарски програми могу да обезбеде околину која омогућава наставницима да приказују математичке концепте и процесе, а ученицима да их истражују. У току демонстрација и истраживања могуће је фокусирање не само на посебан пример који рачунар тренутно конструише, већ је, такође, могуће да се он сагледа као типичан представник класе примера. Сагледавањем широке разноврсности, не само примера већ и контрапримера, користећи брзину и моћ израчунавања рачунара по налогу наставника и ученика, могуће је фокусирати се на општији концепт који је представљен целом класом примера и добити истински осећај за концепт који може представљати основу за каснији формалнији рад. Свака апликација може се мењати, прилагођавати, развијати и користити за креирање задатака, тестова и нових примера. Рачунар омогућава креирање примера помоћу којих се са мало новог знања, али уз комбиновање новог и старог знања изводе нови закључци, докази и анализе.

Имајући у виду материјал припремљен уз наш уџбеник, доступан сваком ученику, на часовима вежби демонстрирали смо једноставне ситуације везане за интерполацију. Креирали смо променљиве слике, анимације и све то поткрепили рачунањима која се уз употребу рачунара изводе веома брзо.

Резултати нашег експеримента показују да је описани начин презентације интерполације и оцене њене грешке ефикасан.

Литература

- Herceg, D., Herceg, Dj., Numerical Mathematics with GeoGebra in High School, Teaching Mathematics and Computer Science 6/2 (2008), 363-378.
- Herceg, D., Herceg, Đ., Skalarni proizvod i numerička integracija, Pedagoška stvarnost, LV, 1-2 (2009), 88-102.
- Herceg, D., Ljajko, E., Približno rešavanje jednačina uz pomoć računara, Nastava matematike, LIII, 1-2 (2008), 32-42.
- Herceg, Đ., Herceg, D., Definite integral and computer, The Teaching of Mathematics, XII-1 (2009), 33-44.
- Herceg, D., Herceg, Đ., Numerička matematika, Stylos, Novi Sad, 2009.
- Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. Proceedings of Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education 2006. Dresden, Germany: DES-TIME.
- Tall, D., Vinner, A., Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity, Education Studies in Mathematics, 12, 159-169, 1981.

Tall, D., The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, in Grouws D. A., Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, 495-511, 1991.

Dragoslav Herceg, Ph. D., Ђorđe Herceg, Ph. D., Novi Sad

INTERPOLATION AND GEOGEBRA

Summary

When teaching mathematics, especially numerical mathematics, the topics considering empirical data processing and function approximation are in the focus of attention. Polynomial approximation is the most simple one. It is also the basis for differential calculus, numerical integration and calculating differential equations. Although the design of a software program for interpolation is an easy task, students still make numerous errors. Software application in teaching activity, visualisation and procedure simplification may result in better retention of the notion of interpolating polynomial and calculating approximate values. One possible approach in teaching interpolation is presented in the article, according to the experience gained while teaching mathematics in 'Jovan Jovanović Zmaj' Grammar School as well as students of mathematics and computer science at Faculty of Sciences in Novi Sad. General reflection has been supported with test results which are obtained from students of several generations.

Key words: teaching mathematics, numerical mathematics, software application in teaching activity

Д-р Драгослав Герцег, д-р Джордже Герцег, Новый Сад

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И GEOGEBRA

Резюме

В процессе обучения математики, в особенности нумеративной математики, учителя обрабатывают темы, относящиеся к обработке эмпирических данных и аппроксимации функций. Как простейшая является полиномиальная, многочленная аппроксимация. Она является основой для нумеративной дифференциации, нумеративной интеграции и нумеративного решения простых дифференциальных уравнений. Формирование программных ученики делают многочисленные ошибки. Используя компьютеры в процессе обучения, визуализацией и упрощением процедур на счёте нужных данных, осуществляются значительные улучшения в

понимании понятия интерполяционного полинома, при счёте приблизительных значений, величин с помощью его. На основании опыта в работе с учениками гимназии „Йован Йованович Змай“ в Новом Саде и студентами Естественно-математического факультета в Новом Саде, авторы предлагают один из возможных подходов в обработке темы интерполяции. Общие замечания подкреплены результатами тестов проведённых с учениками нескольких поколений.

Опорные слова: процесс обучения математики, нумеративная математика, компьютеры в процессе обучения

Мр Еуген Љајко

Природно математички факултет, Косовска Митровица

Златка Павличић

Средња техничка школа „Никола Тесла“, Лепосавић

Ивана Радуловић

Средња техничка школа „Никола Тесла“, Лепосавић

UDK 371.3::514]::004

UDK 373.5:[371.215::514:12

Прегледни чланак

Примљен: 25. XII 2009

BIBLID 0553-4569, 55 (2009), 9-10, p. 909-920

GEOGEBRA У СРЕДЊОШКОЛСКОЈ НАСТАВИ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Резиме

GeoGebra нуди изузетно велике могућности за осавремењивање наставе аналитичке геометрије у средњој школи. Колико је заиста та настава ефикасна? Колики труд треба да уложи наставници и ученици да би смисаоно спојили GeoGebri и математику? Да ли се тај труд исплати? Овим радом смо покушали дати одговоре на ова и још нека сродна питања. Као извор информација нам је послужила огледна настава у техничкој школи „Никола Тесла“ у Лепосавићу. GeoGebra је уколпљена у наставу аналитичке геометрије употребом одговарајућих динамичних радних листова. При организовању и извођењу огледне наставе коришћени су и резултати ранијих истраживања у овој области (др Драгослав Херцег, др Радивоје Стојковић). У раду су приказани неки од радних листова употребљених у настави, могући облици организовања и извођења овакве наставе, видови уређења учионице, као и могуће предности и мане овакве наставе.

Кључне речи: образовни софтвери, GeoGebra, динамична геометрија, рачунарска настава

1. Увод

Чланком [6] приказали смо употребу образовних софтвера GeoGebra и Mathematica у настави Нумеричке математике, посебно у излагању приближног решавања једначина. Добијени резултати су нас охрабрили за даљу примену тих софтвера, али и поставили пред нас нове захтеве за свестраније уклапање и сажимање GeoGebre и средњошколске наставе математике. С обзиром да је област *Аналитичка геометрија* планом и програмом заступљена у средњим техничким школама и гимназијама са великим фондом часова није било потребно никаво мењање броја и редоследа часова потребних за ову прилику. Рачунари у учионици су представљени као додатно наставно средство погодно за приказивање геометријских објеката и оперисање њима. Овим радом смо покушали да одгово-

римо на питања да ли су, у коликој мери и у ком смеру они утицали на квалитет наставе и количину и квалитет стечених знања ученика.

Искуства стечена током огледене наставе извођене у Новом Саду (2003–2008) била су нам од велике помоћи приликом организовања и извођења сличне наставе у Лепосавићу. Ова настава је само један корак у проширивању и заокруживању употребе GeoGebre у настави математике у свим разредима средњих школа.

2. Аналитичка геометрија у средњим школама

Аналитичка геометрија се изучава у свим средњим техничким школама и општим и природно-математичким гимназијама са великим фондом часова. Јасна је њена уска повезаност са основним знањима из линеарне алгебре и вектора као и њено даље уклапање у математичку анализу. То довољно говори о њеном значају како за примену математике тако и за даље развијање логичког мишљења и стварања математичке културе код ученика. Због свега овога, потребно је посветити посебну пажњу осавремењивању и побољшању наставе аналитичке геометрије.

3. Употребљени софтвер

Иако аналитичка геометрија не спада у ред наставних јединица које ученици сматрају “досадним” и изразито тешким то нам не даје за право да се не трудимо да је што више приближимо ученицима употребом нових метода.

Један од начина за то је увођење GeoGebre у наставу. GeoGebra је бесплатан и широко распрострањен софтвер, доступан практично свима путем интернета; може се, рецимо, преузети са странице www.geogebra.org. GeoGebra нуди могућност реализације динамичне геометрије што отвара мноштво нових могућности како за разумљивије приказивање скица и цртежа тако и за решавање задатака. Нема строгу синтаксу, унос података је врло сличан стандардној нотацији тако да је лако прихватљива за ученике свих узраста. Осим тога, преведена је и на српски језик што је додатно олакшање у раду са њом. Практиковано је да се ученици упознају само са делом софтвера који им је тренутно потребан. Међутим, како су у средњој школи ученици увелико већ упознати са сличним програмима, није било потешкоћа у смислу доживљавања GeoGebre као додатног градива. Поучени претходним искуством, у овом периоду ученике смо охрабривали на слободнију употребу рачунара и експериментисање што је имало својих предности и дало резултате.

Можда је већи и озбиљнији проблем било припремање наставника за овакву наставу. Основна потешкоћа је било њихово слабо познавање софтвера, као и теже привикавање на нови начин рада. Уз свесрдно залагање наставника тај је проблем превазиђен и дошло се до видних олакшања како у припреми наставе тако и у њеној реализацији и вредновању резултата.

4. Проблем, циљеви и задаци истраживања

Овим радом смо покушали утврдити да ли, у коликој мери и у ком смеру увођење рачунара и софтвера GeoGebra утиче на квалитет и резултате наставе аналитичке геометрије у средњој школи. Зато смо проблем овог истраживања дефинисали као:

Сагледавање могућег утицаја рачунарски потпомогнуте наставе на процес учења и успех у теми „Аналитичка геометрија у равни“.

У складу са наведеним проблемом морају се конкретизовати циљеви овог истраживања. Грписали смо их на следећи начин:

1. Утврђивање прихваћености излагања, извођења и употребе аналитичке геометрије уз помоћ рачунара. Повратне информације би могле бити од користи при стварању оптималних услова за примену рачунара у настави аналитичке геометрије.
2. Израда одговарајућих рачунарских апликација за подршку настави аналитичке геометрије у средњој школи.

На основу наведених циљева постављају се задаци чијим би се испуњењем истраживање заокружило у једну логичку целину и заинтересованим наставницима пружила помоћ при организовању и извођењу рачунарске наставе не само у овој области.

Задаци овог истраживања су:

1. Прецизирати методичко–дидактичке услове који ће утицати на повећање ефикасности обраде и примене аналитичке геометрије.
2. Проверити већ постојеће modele рачунарске наставе (евентуално их прилагодити тренутном окружењу) како на нивоу наставног часа, тако и за мање и веће наставне целине.

5. Наставно окружење

Имајући на уму наше техничке могућности одустали смо од класичног педагошког експеримента и приступили преуређењу, посматрању и унапређивању већ постојеће наставе у машинском (М) и природно-математичким (Г) одељењу трећег разреда техничке школе „Никола Тесла“ у Лепосавићу. Наставу су у целости обављали радовни наставници како би се избегли споредни ефекти увођења новог предавача.

Ученици трећих разреда поменутих смерова слушају математику са недељним фондом од 5 часова. Фонд часова предвиђених за аналитичку геометрију био је приближан (46 у машинском смеру и 50 у природно-математичком). Часове аналитичке геометрије ученици су пратили у рачунарским учионицама матичне школе. У „Г“ одељењу које броји 22 ученика ученици су радили по двоје за једним рачунаром док је у „М“ одељењу са 8 ученика сваки ученик радио за једним рачунаром. Сви ученици „Г“ одељења изјавили су да или имају свој рачунар или га могу користити код куће. У „М“ одељењу шесторо ученика или има

рачунар или га може свакодневно користити кући док двоје није имало рачунар. Домаћи задаци, као и комуникација са наставником и међу ученицима су добрим делом рађени електронским путем. То значи да се рачунарско окружење није свело само на учионицу већ је природно постало и ваншколска активност. Наставник је у учионици имао свој рачунар помоћу којег је имао директан приступ било ком рачунару у учионици.

Рад у току часа одвијао се комбинованим коришћењем табле и рачунара. Уз уџбеник [3], писан према важећем наставном плану и програму, користили смо динамичне радне листове које смо саставили на основу излагане материје и примера у уџбенику [3]. Сваки задатак урађен на било ком рачунару у учионици могао је да се преузме на други рачунар или да се понесе на одговарајућем носиоцу меморије. Исто тако могли су да се размењују домаћи задаци. На тај начин ученици су допуњавали материју из уџбеника примерима добијеним на часу.

Овакав вид наставе аналитичке геометрије ученици су углавном радо прихватили и већ након неколико почетних часова то је био природни начин изучавања материје. Да би то и званично утврдили, месец дана након почетка огледне наставе спровели смо анкету са циљем сагледавања расположења ученика према новом виду наставе. Резултати анкете су нас охрабрили да наставимо са огледом. Резултате анкете ћемо детаљније размотрити касније.

6. Прилагођавање наставне материје рачунарском окружењу

Учење математике у рачунарском окружењу доводи до потребе да се математички концепти преобликују за приказ и употребу на рачунару. Притом, наставник мора да води рачуна о два стварима: не сме се изменити значење математичког појма и морају се максимално искористити потенцијали рачунара тако да се посматрани појам смислено уклопи (и) у рачунарско окружење.

Због природе изучавање материје, није било изразитих проблема у смислу да се појам приказан на рачунару суштински разликује од изучаваног појма у толикој мери да се не могу идентификовати као исти појмови. Ипак, у неколико наврата дошли смо у ситуацију да материја приказана на рачунару у себи носи извесну дозу произвољности што је у супротности са научним приступом настави и прецизношћу коју захтева математика. То су били следећи случајеви:

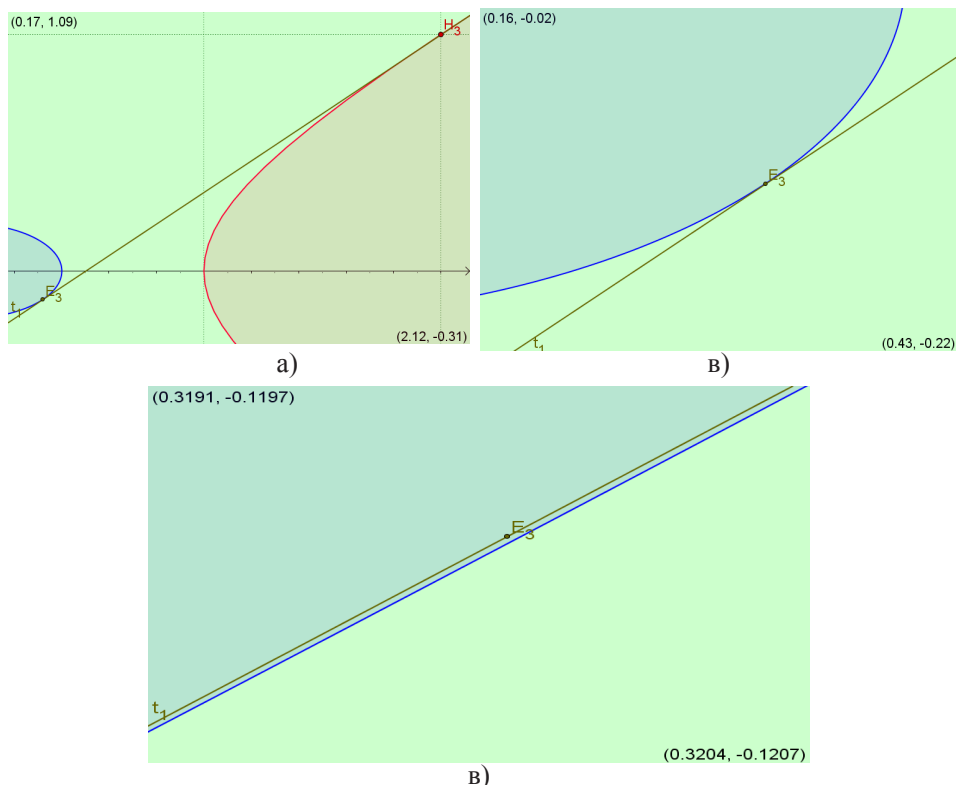
- Утврђивање да ли тачка припада некој линији или не,
- Утврђивање да ли је права тангента неке криве или није.

У обе ове ситуације, слика у динамичном радном листу не даје јасан увид као рачуница на папиру, чак нас може и навести на погрешан закључак.

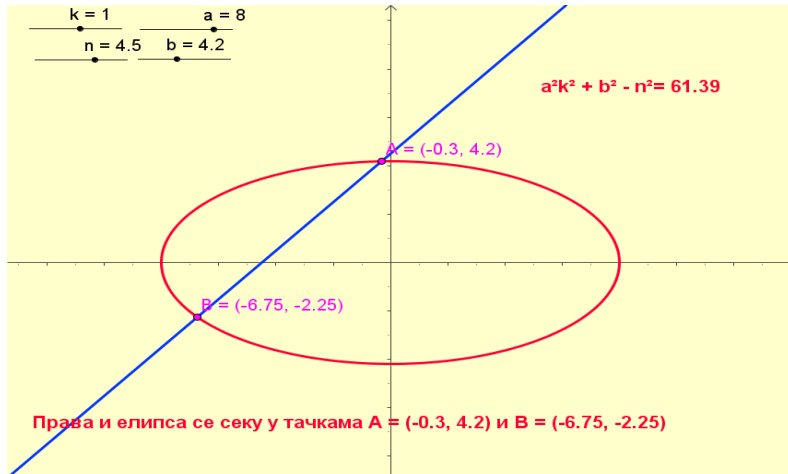
Конкретно, у ситуацији када је ученик требао да постави заједничку тангенту елипсе и хиперболе, урадио је тако што је у апликацији поставио праву која визуелно задовољава оба услова. Простим увећавањем, међутим, лако се види да добијена права није тангента елипсе. Рад тог ученика са увеличаним детаљем приказан је на сликама 1. а), б) и в).

Зато смо на овим местима ученицима скретали пажњу на недостатке примене рачунара у овој области и препоручили комбиновање рада на рачунару са радом у свесци или на табли. Ово је посебно важно за избегавање **техноцентризма** који је присутан у почетним стадијумима употребе рачунара због одушевљења и уверења да „рачунар може све“.

За потребе овакве наставе састављали смо динамичне радне листове, по 1–3 за сваку лекцију. На самом почетку радни листови су коришћени као покретни прикази изучаване материје. Овим је, истина, умногоме олакшано схватање материје, али је самоиницијативност и инвентивност ученика сведена на најмању могућу меру. Како су се ученици већ на неколико наредних часова ухватали у рад са GeoGebrom почело се са активном употребом рачунара, стварањем сопствених алата, исправљањем добијених резултата и постепеним побољшавањем примењених поступака. На слици 2. приказан је прозор *GeoGebre* при раду једне од лекција.



Слика 1. Да ли је права t_1 тангента или сечица елипсе?



Слика 2. Детаљ из динамичног радног листа употребљеног у настави

7. Сечена искуства и резултати наставе

Иако је након почетних напора увођење рачунара и GeoGebre у наставу математике велико олакшање за наставнике, то никако не би требало да буде разлог да се жури са рачунарском наставом по сваку цену. Одлуку о томе треба донети након сагледавања расположења ученика према новини и (што је још важније) на основу постигнутих резултата.

Ради утврђивања расположења ученика према новом виду наставе, спровели смо анкету следећег садржаја:

Име и презиме: _____, одељење _____

1. Општи успех у: а) првом разреду _____
 б) другом разреду _____
 в) првом полугођу трећег разреда _____
2. Оцена из математике у: а) првом разреду _____
 б) другом разреду _____
 в) првом полугођу трећег разреда _____
3. Да ли кући поседујеш рачунар или имаш могућност свакодневног коришћења рачунара:
 ДА _____ НЕ _____

Уколико си на питање 3. одговорио/ла са ДА одговори на питања 4. и 5. ; уколико је одговор НЕ, одговори на питања 6. и 7.

4. Да ли неке делове изучавање материје боље разумеш ако их кући учиш помоћу рачунара?
ДА НЕ ЗНАМ НЕ
5. Да ли сматраш да домаће задатке радиш боље помоћу рачунара?
ДА НЕ ЗНАМ НЕ
6. Да ли сматраш да домаће задатке радиш слабије због недостатка рачунара?
ДА НЕ ЗНАМ НЕ
7. Да ли неко од твојих другова – другарица из одељења боље разуме изучавану материју од тебе само зато што има рачунар?
ДА НЕ ЗНАМ НЕ
8. Да ли је GeoGebra први образовни софтвер са којим се срећеш?
ДА НЕ
9. У коликој мери ти учење рада са GeoGebrom представља потешкоћу?
Веома Много Мало Нимало
10. Колико су ти часови математике изведени помоћу рачунара и GeoGebre занимљиви?
Веома Много Мало Нимало
11. Да ли више појмова из математике научиш на „рачунарском“ или „класичном“ часу?
Много више на „рачунарском“ Више на „класичном“
Више на „рачунарском“ Много више на „класичном“
12. Колико боље разумеш математичке појмове на „рачунарском“ или „класичном“ часу?
Много боље на „рачунарском“ Боље на „класичном“
Боље на „рачунарском“ Много боље на „класичном“
13. Да ли задатке на часовима математике лакше радиш уз или без помоћи рачунара?
Уз помоћ рачунара Подједнако добро Без помоћи рачунара
14. Како оцењујеш „рачунарске“ часове математике у поређењу са „класичним“?
Много су бољи Бољи су Нема разлике Гори су Много су гори

15. Да ли би убудуће желео/ла више или мање „рачунарских“ часова математике?
Много више Више Не знам Мање Много мање Нимало

Одељење „Г“ је у претходном периоду имало бољи општи успех и просечну оцену из математике али се то није показало нарочито значајним у погледу учинка нове наставне методе јер су и слабији ученици једнако добро или чак боље савладавали начин рада са GeoGebrom и градиво приказано на рачунару помоћу ње.

Сви ученици одељења „Г“ и 6 од 8 ученика одељења „М“ изјавили су да или имају рачунар или га могу свакодневно употребљавати код куће. Два ученика који су похађала рачунарску наставу, а немају рачунар не сматрају да остали ученици због тога имају предност на часовима математике. Међутим, они су на тесту показали исти успех као досад док су остали ученици њиховог одељења имали исти или бољи успех. То значи да рачунарска настава даје боље резултате ако се рачунарско окружење не ограничи само на школу.

Већина ученика (25 од укупно 30) се већ сретала са сличним образовним софтвером тако да увођење GeoGebre у наставу није било новина. Осим тога, сви сматрају да савладавање GeoGebre не представља потешкоћу која би отежала учење математике.

Интересантни су одговори на 11. 12. и 13. питање јер се на основу њих види да ученици током рачунарске наставе стичу више појмова и лакше решавају задатке, али је квалитет тог знања нижи у смислу да постоје извесна одступања у приказивању математичких појмова на папиру и рачунару.

Уопштено говорећи, током огледне наставе ученици су стекли изузетно позитиван став према употреби рачунара у настави аналитичке геометрије.

За утврђивање успешности овакве наставе упоредили смо средње оцене одељења пре почетка огледне наставе са оценама током и на крају истраживања. У ту сврху, радили смо два теста: један месец након почетка истраживања из области *Дуж* и *Права* и други на крају рада из осталих области. Тестови су се састојали од задатака исте или приближне тежине као они рађени на часовима. Резултати тестова су приказани у Табели 1:

Одељење	Број ученика	Просечна оцена		
		Прво полугође	I тест	II тест
Г	22	3,7	3,23	3,59
М	8	2,25	2,3	2,57

Табела 1. Просечне оцене по одељењима у различитим периодима

Упада у очи да је одељење „Г“ радило испод свог просека док је одељење „М“ показало извесно побољшање. Без обзира на то, видно је да су резултати другог теста осетно бољи у оба одељења. Узрок томе је привикавање на нови

начин рада. Зато је оправдано очекивати да би резултати након дуже употребе GeoGebre у настави у најмању руку били исти или (узимајући у обзир раст просечне оцене) бољи од досадашњих. То ће се, наравно, утврдити накнадним истраживањима.

Осим тога, посебно треба обратити пажњу на то да су у оба одељења слабији ученици показали већи напредак вероватно због тога што су нову методу видели као шансу за доказивање. Бољи ученици су то углавном доживели као промену са којом се треба изборити да би доказали дотадашње успехе.

Зато се треба трудити да се сваком ученику у складу са његовим стањем, могућностима, интересовањима и знањем објасне предности и укаже на недостатке и опасности увођења рачунара у наставу математике.

8. Закључак

Настава у рачунарском окружењу описана у овом раду може бити од велике помоћи наставницима који желе примењивати рачунаре у настави само ако се из стечених искустава извуку исправни закључци. Не би требало дозволити да се процес наставе одвија стихијски или да драгоцене искуства до којих се дошло мукотрпним радом једноставно остану неискоришћена у наредним циклусима наставе. Како би се оваква настава стално унапређивала потребно је обратити пажњу на постављене циљеве и задатке. Од велике користи би било одредити начине и услове њиховог испуњења. Што се тиче циљева, у светлу изведене наставе битно је напоменути:

1. Прихваћеност излагања материје уз помоћ рачунара и заинтересованост за аналитичку геометрију умногоме зависи од приступа ученицима. Огледна настава је показала да заинтересованост ученика за материју и рачунарско окружење расте уколико се ученицима дозволи експериментисање и слободна употреба рачунара. Наравно, заједно са заинтересованошћу расте и учинак наставе.
2. Динамичне радне листове – апликације потребне за овакав вид наставе радили смо самостално у GeoGebri у свакој лекцији по 1 – 3. Оне су се заснивале на одговарајућим лекцијама из уџбеника [3] писаног по важећем наставном плану и програму. Осим тога, на званичном сајту GeoGebre, www.geogebra.org може се наћи мноштво урађених апликација које наставницима могу послужити за припрему наставе.

У вези са задацима изведеног истраживања стално треба имати на уму користи које би од њега имала свака настава математике у рачунарском окружењу. Зато, на основу овог истраживања изводимо следеће закључке:

1. Ради повећања ефикасности обраде и примене аналитичке геометрије треба инсистирати на томе да је рачунар не само помоћно рачунско средство већ и извор велике количине информација и идеја везаних за дати проблем. Уколико ученици буду имали овакав став, створиће се атмосфе-

ра у којој се од рачунара не очекује да реши цео проблем, већ он помаже у извршавању рачунских делова задатака, цртању графика, проверавању хипотеза (једноставним варирањем почетне ситуације) и, често, стварању нових идеја за решавање проблема. Оваква атмосфера омогућава да се извуче максимум и из ученика и из рачунара.

2. Видови наставе који би били најпогоднији у рачунарском окружењу могу варирати од ситуације до ситуације. Међутим, концептом *ja – ти – ми* који су развили Улм и Баух, обзиром да је лако изводљив у рачунарском окружењу, могу се постићи одлични резултати и из ученика извући оно најбоље. Иако извођење наставе по овом концепту захтева опсежне припреме, он се природно намеће не само на часу већ и у ваншколском изучавању проблема. Фазе *ja* и *ти* овог концепта се могу извести на часу док се последња фаза природно и спонтано развија ван школе. Пример за то су многобројни форуми на интернет страницама математичких образовних софтвера где ученици могу размењивати искуства са милионима корисника истих софтвера.

Оваквим прецизирањем услова и начина за испуњење циљева и задатака спроведеног истраживања будућим наставницима се умногоме олакшава планирање и извођење наставе математике у рачунарском окружењу. Првенствено се мисли на избор и обим градива, избор одговарајућег софтвера, уређење учионице као и избор типова и метода наставе.

Ово је само један од предлога како да се то уради и сматрамо да ће се праксом доћи до најпогоднијих путева стицања знања и изграђивања савремене друштвено корисне личности ученика.

Литература

- Hoyles, C., Noss, R., Kent, P.: *On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms*. International Journal for Computers in Mathematical Learning, 2003.
- Ulm, V.: *Ich, Du, Wir – ein Lern- und Arbeits prinzip im Mathematikunterricht*. Praxis Schule, 5–10, Heft 4 (2002), 30–34.
- Кечкић, Ј. Д.: Математика са збирком задатака за трећи разред средње школе, Научна књига, Београд, Завод за уџбенике и наставна средства, Нови Сад, 1990.
- Наставни програм математике за гимназије у Републици Србији*, Архимедес, Београд, 1991.
- Херцег, Д.: *Математика и рачунари у школи*, Технологија, информатика и образовање за друштво учења и знања, Зборник радова, 470–475, Нови Сад, 2007.
- Херцег, Д., Љајко, Е.: *Приближно решавање једначина помоћу рачунара*, Настава математике, LIII, 1- 2, Београд 2008.

Eugen Ljajko, M. A., Zlata Pavličić, Ivana Radulović

GEOGEBRA IN TEACHING ANALYTICAL GEOMETRY FOR SECONDARY SCHOOL PUPILS

Summary

GeoGebra offers further advancement potentials for teaching analytic geometry in secondary school. However, is it efficient? How much effort does it take to connect meaningfully GeoGebra and mathematics? Is it worth the effort? The article deals with reasonable answers and some additional issues. Experimental teaching activity in secondary technical school 'Nikola Tesla' in Leposavić was the source of the obtained data. GeoGebra has become a part of the teaching activity of analytic geometry by using suitable dynamic written assignments. Organization of experimental teaching activity comprised some previous research results in this field of investigation (Dragoslav Herceg, Ph.D., Radivoje Stojković, Ph.D.). The article presents some former written assignments, possible forms of teaching activity organization, different classroom arrangements as well as potential advantages and drawbacks.

Key words: educational software, Geogebra, dynamic geometry, software application in teaching activity

М-р Еуген Љајко, Косовска Митровица, Златка Павличич, Ивана Радулович, Лепосавич

GEOGEBRA В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНИХ ШКОЛАХ

Резюме

Geogebra даёт исключительно большие возможности в усовершенствовании процесса обучения аналитической геометрии в средней школе. Но, насколько такой процесс обучения эффективный? Сколько труда должны вложить учителя и ученики чтобы смыслово соединить Geogebra и математику? Стоит ли эта попытка вложенного труда? По настоящей очереди мы сделали попытку дать ответы на эти вопросы и ещё некоторые подобные вопросы. Источником информации нам послужил наглядный процесс обучения в средней технической школе „Никола Тесла“ в городе Лепосавич. Geogebra мы включили в процесс обучения аналитической геометрии, используя соответствующие динамические рабочие листки. В организации и реализации наглядного обучения использованы и результаты прежних исследований в этой области (Д-р Драгослав Герцег, д-р Ради-

вое Стойкович). В настоящей работе представлены некоторые из рабочих листов употреблённых в процессе обучения, возможные формы организации и преализации такого процесса, формы оборудования класса и возможные преимущества и недостатки такого процесса обучения.

Опорные слова: образовательные программы, Geogebra, динамическая геометрия, компьютерное обучение

Мр Антон Врдољак

Грађевински факултет, Свеучилиште у Мостару

Др Милорад Бањанин

Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду

UDK 371.3::51]:004

UDK 371.64/.69:004

Прегледни чланак

Примљен: 25. XII 2009.

BIBLID 0553-4569, 55 (2009), 9-10, p. 921-931

ОБРАЗОВНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ПРОГРАМА ЗА ДИНАМИЧКУ МАТЕМАТИКУ: СЛУЧАЈ GEOGEBRA

Резиме

Програми за динамичку математику са њиховим динамичким окружењима за учење сматрају се данас најбољим начином за подстицање процеса активног учења. У посљедње вријеме постоје бројне студије које су показале да технологије посједују битан образовни потенцијал за развој основних вјештина код ученика, као и за проширивање њихових знања. У овом раду ћемо се фокусирати на GeoGebra, врсту програма за динамичку математику који повезује геометрију, алгебру и анализу, који је развијен за поучавање математике у школама. Програм је отвореног кода, бесплатно је расположив свима, те се може покретати на више платформи. Идеја, која је довела до овог рада, имала је за циљ истражити да ли и у којој размјери GeoGebra може да допринесе побољшању стицања знања и вјештина код ученика, у случају динамичког поучавања и учења у настави математике?

Кључне речи: настава математике, геометрија, алгебра, технологије у настави, професионални развој, образовни потенцијал, GeoGebra

Увод

Предвиђање будућности употребе технологија у настави математике лежи у проучавању њене историје и њеног тренутног стања. Технологија је одиграла значајну улогу у настави и учењу математике кроз вијекове. Другим ријечима, она је одиграла улогу од огромне важности не само код побољшања самопоштовања код ученика, већ и код обезбеђивања прилике ученицима да буду математичари. Надаље, многе недавне студије су показале да данас модерна технологија омогућава лакше истраживање математике у односу на раније могућности. Према Preiner (Preiner, 2008), данашње технологије које се користе у настави и учењу математике могу се разврстати у двије главне категорије, такозвани *virtual manipulatives* алати и општи програмски (софтверски) алати. *Virtual manipulatives* алати могу се дефинисати као „интерактивне, Web-базиране визуелне репрезен-

тације динамичких објеката који посједују могућности за изградњу и представљање математичког знања“ (Moyer и остали, 2006). *Virtual manipulatives* омогућавају ученицима да комуницирају са математичким ситуацијама (у математичком контексту) без потребе за икаквим додатним вјештинама или обучавањем, премда је ученичко истраживање ограничено дизајном виртуелне манипулације. Насупрот томе, општи софтверски алати омогућавају студенту да истражује било који број математичких појмова али за употребу, односно рад са њима, захтијевају неко додатно обучавање.

Данас се у математици користи низ општих софтверских алата, па тако у последње вријеме имамо већи број моћних технолошких алата намијењених за коришћење у математици, како од стране ученика, тако и наставника, те осталих учесника у процесу наставе математике, као и других наставника. С једне стране, постоје такозвани системи динамичке геометрије (енгл. *Dynamic Geometry Systems – DGS*) као што су *Cabri* или *Cinderella*. С друге стране, постоје такозвани системи рачунарске алгебре (енгл. *Computer Algebra Systems – CAS*) као што су *Mathematica* или *Derive*. Ова врста, такође, укључује прорачунске табеле (енгл. *spreadsheets*). Несумњиво, ови алати (*DGS*, *CAS* и *spreadsheets*) веома су утицали на развој математичког образовања. Нажалост, коришћење ових трију врста алата најчешће је потпуно неповезано. Срећом, прије осам година је рођен нови софтверски систем који спаја могућности сва три система, динамичке геометрије, рачунарске алгебре и прорачунских табела, у један алат за математичко образовање – он је познат као *GeoGebra*.

Према Schellenberg (Schellenberg, 2009), *GeoGebra* је софтвер који покушава да комбинује *DGS*, *CAS* и прорачунске табеле у једну апликацију. Другим ријечима, *DGS*, *CAS* и прорачунске табеле су врсте софтвера које *GeoGebra* настоји да интегрише у један кохерентан алат. Према Hohenwarter (Hohenwarter 2001), креатору *GeoGebra*, *GeoGebra* је програм за динамичку математику за све нивое образовања, а који спаја аритметику, геометрију, алгебру и рачун. Он нуди вишеструкост приказа математичких објеката у свом графичком, алгебарском и табличном приказу који су динамички повезани. Сваки објекат у *GeoGebra* представљен је како у алгебарском тако и у графичком (геометријском) прозору. Корисник може подесити вриједности објекта кроз алгебарску репрезентацију (представљање), док је кроз графичку репрезентацију у могућности да превлачи геометријску фигуру помоћу миша, или да помоћу тастатуре мијења симболе који га представљају (Preiner, 2008).

Док се други интерактивни софтвери (као нпр. *Cabri Geometry*, *Geometer's Sketchpad*) фокусирају на динамичке манипулације геометријским објектима, идеја која стоји иза *GeoGebra* је да се повежу алгебарска и нумеричка репрезентација на интерактиван начин. Можете чинити конструкције са тачкама, векторима, правима, конусним пресецима, као и функцијама, те их након тога динамички мијењати. Осим тога, *GeoGebra* вам омогућава директан унос и манипулацију једначинама и координатама. Тако можете једноставно цртати функције, радити

са клизачима у сврху испитивања параметара, пронаћи симболику извода, те користити моћне команде као *NulaFunkcije* или *Niz*.

Надаље, врло важна карактеристика *GeoGebre* је да је *GeoGebra* врста програма динамичке математике који је отвореног кода, који је бесплатно расположив, те који се може покретати на више платформи. Markus Hohenwarter, креатор *GeoGebre*, рекао је да разлог зашто је *GeoGebra* објављена као бесплатна апликација отвореног кода лежи у његовом вјеровању како образовање треба да буде свима слободно. Дакле, *GeoGebra* је бесплатно доступна школама и ученицима, елиминишући тако фактор трошкова за школе са ограниченим буџетима. Ученици су у могућности да користе апликацију код куће на својим персоналним рачунарима, без бриге за њено лиценцирање. Корисна страна постојања отвореног кода *GeoGebre* лежи у чињеници наглог пораста интереса заједнице за развијањем овог пројекта, што је омогућило да *GeoGebra* буде преведена на много језика (*GeoGebra* 3.2 подржава 45 различитих језика у јуну 2009), а што је *GeoGebri* учинило доступном много већем броју ученика и наставника. Док год је *GeoGebra* апликација отвореног кода, то јој даје како моралну тако и прагматичну предност над власничким софтверима. Надаље, зато што је *GeoGebra* писана у *Javi*, то јој омогућава да ради (да се покреће) на практично било којој платформи (*Mac*, *Windows*, *Linux*). Такође, због разлога што је писана у *Javi*, *GeoGebra* омогућава лак извоз датотека као динамичких личних односно *Web*-страница. Ово омогућава једноставно креирање *online* математичких садржаја, који се често називају математичким аплетима. Лакоћа са којом се *GeoGebra* скице и аплети могу дијелити на мрежи (*online*), довела је до тога да заједница (заједнице) наставника користе *GeoGebri* на начин да на мрежи, <http://www.geogebra.org/en/wiki>, слободно дијеле међу собом властите креиране садржаје (ресурсе) (Schellenberg, 2009).

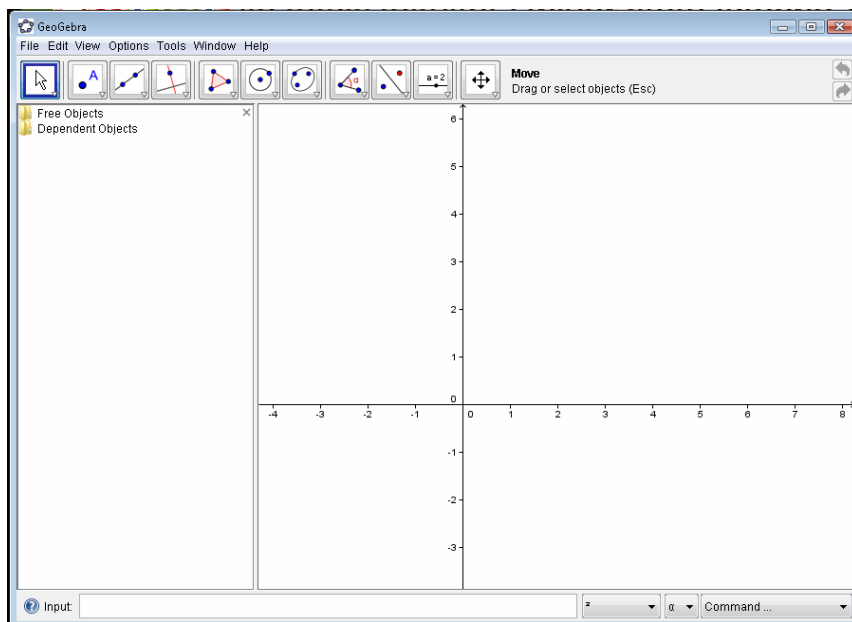
Имплементација принципа е-учења у *GeoGebri*

Зато што *GeoGebra* спаја динамичку геометрију са рачунарском алгебром, њен кориснички интерфејс садржи додатне компоненте које се не могу наћи у чистим програмима динамичке геометрије. Поред посједовања два прозора која садрже алгебарске и графичке приказе објеката, кориснички интерфејс садржи компоненте које омогућавају кориснику унос објекта у оба приказа (прозора) као и мени траку (види слику 1).

Надаље, у случају *GeoGebre*, програмер покушава да начини дизајн корисничког интерфејса софтвера на једноставан и јасан начин, који подржава модел когнитивних процеса учења са мултимедијом, и смањује когнитивно оптерећење на добробит више успјешног учења. Дизајн корисничког интерфејса *GeoGebre* се, такођер, огледа у намјери подстицања ефикасног учења реализованог по принципима е-учења које наводе Clark и Mayer (Clark и Mayer, 2003).

Принцип мултимедијалности: „*Use words and graphics rather than words alone.*“ (види Clark и Mayer, 2003, стр. 51) – *радије користи ријечи и графику*

умјесто самих ријечи – имплементиран је на неколико начина у корисничком интерфејсу *GeoGebra* комбиновањем текста (у овом случају нумеричких и алгебарских израза) са графичким репрезентацијама (Hohenwarter и Preiner, 2008, стр. 7).



Слика 1. GeoGebra-ин кориснички интерфејс

На почетку, софтвер нуди два погледа сваког објекта. Алгебарски приказ одговара текстуалној компоненти, а графички приказ додаје визуелна компонента помињана у овом принципу (начелу).

Друго, прозор за опис (протокол) динамичке конструкције може се отворити и поставити поред графичког прозора. Он садржи име, дефиницију, команду, и алгебарски израз за сваки објекат који се користи у конструкцији и пружа навигацијску траку по којој пратимо конструкцију корак по корак. Корак конструкције који се извршава је истакнут у опису конструкције док се одговарајући објекат појављује у графичком прозору *GeoGebra*.

Треће, статички и динамички текст може се уметати у графички прозор како би се нагласили одређени математички појмови (концепти) и односи, динамички показале промјене у одабраним алгебарским изразима, назначиле математичке инваријанте, или спровели прорачуни. Коначно, принцип мултимедијалности, такођер, утиче на извозне могућности *GeoGebra*. С једне стране, такозвани динамички радни листови комбинују интерактивне динамичке фигуре са објашњењима и задаћама за ученике. С друге стране, опис конструкције може се извести за сваку

конструкцију или динамичку фигуру (лик), те даје текстуални опис свих објеката у оквиру табеле, као и слику стварне конструкције (Preiner, 2008).

Принцип непрекидности: „*Place corresponding words and graphics near each other.*“ (види Clark и Mayer, 2003, стр. 67) – *поставите одговарајуће ријечи и графике близу једне другима* – такође је имплементиран на неколико начина у корисничком интерфејсу *GeoGebra* постављањем одговарајућих ријечи (овдје: математичких израза) и графика једни близу другима, што олакшава проналажење одговарајућих приказа истог објекта (види Hohenwarter и Preiner, 2008, стр. 7).

На почетку, *GeoGebra* обезбјеђује *pop up* (скочни) текст који показује дефиниције објеката када се мишем прелази преко једне од репрезентација тог објекта. Поред тога, *pop up* текст се појављује када показивач миша лебди над једном од икона на траци са алаткама, приказујући име одговарајућег алата.

Друго, ознаке објеката могу да се састоје било од имена, било од алгебарских вриједности, или чак било од имена и вриједности објекта. Док ознака прати кретање свог објекта, графички и алгебарски приказ (репрезентација) објекта увијек стоје једни близу другима.

Треће, оба приказа објекта приказана су истом бојом, које могу лако бити измјењене од стране корисника како би се правила разлика између два објекта истог типа (нпр. два круга). Ово олакшава проналажење одговарајућих репрезентација у алгебарском прозору, графичком прозору, као и прозору описа динамичке конструкције.

Четврто, статички и динамички текст се могу лако уметнути у графички прозор. Они могу бити постављени у непосредној близини одговарајућих објеката или чак могу бити придодати њима тако да динамички прате сваки покрет.

Принцип кохеренције: „*Adding interesting material can hurt learning.*“ (види Clark и Mayer, 2003, стр. 111) – *додавање интересантних материјала може повриједити учење* – такођер је узето у обзир избјегавањем непотребног узнемиравања, које може настати код постављања блиставих боја или украса у оквиру корисничког интерфејса *GeoGebra* (види Hohenwarter и Preiner, 2008, р. 7). Непотребни објекти, такође, могу бити скривени у оба прозора, а да би се избјегло збуњивање ученика и на тај начин помогло да се фокусирају на релевантне компоненте динамичке фигуре (лика). У алгебарском прозору, ово се може постићи дефинисањем ових објеката као ‘помоћних објеката’ и њиховим скривањем од погледа, што омогућава кориснику да ‘поспреми’ листе слободних и зависних објеката. У графичком прозору појављивање ових објеката може бити промјењено тако да не привлаче пажњу више (нпр. испрекиданим линијама, свијетлим бојама) или чак те објекте можемо једноставно скрити од погледа.

Неки модели и приступи коришћењу *GeoGebra*

Идеја о интеграцији DGS, CAS, прорачунских табела, и имплементацији софтвера отвореног кода у настави математике чини ослонац који подупиरे нове приступе изучавању мишљења учитеља и технолошких артефаката у употре-

би. Сљедећи модели и приступи обећавају да ће бити корисни за дизајн више успјешних могућности професионалног развоја, а које ће његовати ефикасну интеграцију *GeoGebre* у наставу и учење математике.

Модел код којег наставници врше обуку наставника показао се као обећавајући модел технолошког професионалног развоја. Такође је добар модел у случају *GeoGebre*. Истраживања показују да инструктори који су и сами у служби учитеља разумеју учioniчко–наставну праксу и захтјеве наставе математике боље од осталих наставника који нису директно повезани са школама. Њихова упутства и инструкције су више релевантни и кредибилни за друге наставнике (види Howard и остали, 2000) и прихватају се лакше, изазивајући тако већу спремност за испробавање нових софтвера у њиховим учioniцама.

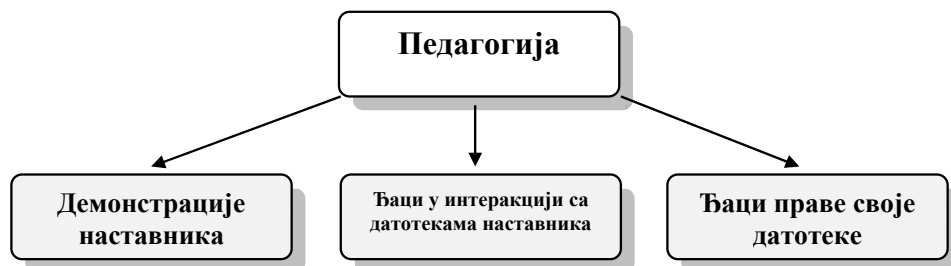
Другим ријечима, примјери најбоље наставне праксе представљени током професионалног развоја наставника довешће до олакшања трансфера нових знања и вјештина у њиховим учioniцама.

Сарадња са колегама, такође, олакшава интеграцију технологије у наставној пракси. Традиционално, већина наставника ради самостално и није научена да имају редовне састанке са колегама. Кроз рад у тимовима, наставници могу да размјењују своја знања и искуства о настави математике у цјелини, а посебно о интегрисању одређених софтвера у сопственој настави (види Lawless и Pellegrino, 2007). Поред тога што су у стању да дијеле наставне материјале, наставници могу да дискутују о примјерима добре наставне праксе, помажу једни другима на отклањању проблема који су се појавили током њихових лекција у које је била укључена технологија, да дијеле искуства, те савјете и трикове у вези са општом употребом софтверских алата у настави и учењу. Поново у случају *GeoGebre*, бити написан у *Javi* значи омогућавати лакши извоз датотека као динамичких *Web*–страница. Ова особина омогућава једноставно и скромно стварање *online* математичких садржаја (математичких аплета). За креирање комплекснијих садржаја неопходно је знање о основама *Java* програмског језика. Лакоћа са којом се *GeoGebre* скице могу дијелити на мрежи (*online*) довела је до слободног дијељења наставних материјала и ресурса међу заједницама наставника широм свијета, најчешће путем многобројних образовних портала или портала за учење, што је за резултат имало стварање великог образовног потенцијала у тим заједницама.

Техничка подршка је још један важан фактор када је ријеч о успјешном професионалном развоју са технологијом. С једне стране, школа мора да обезбеди одговарајућу технолошко–техничку инфраструктуру која се састоји од хардверских компоненти, као што су рачунари и пројектори, софтверских пакета, што укључује одређене опште софтверске алате и доступне *online* садржаје за учење, као и од познате *Internet* конекције. Ова инфраструктура треба да буде доступна како наставницима тако и ученицима, и то сваки дан у седмици. С друге стране, наставници треба да имају контакт особе које су у стању да се носе са техничким проблемима са којима се наставници потенцијално сусрећу приликом коришћења рачунара, те које су на располагању током школског дана у циљу пружања непосредне помоћи.

У случају *GeoGebre*, чињеница да је овај софтвер бесплатно доступан школама и ученицима омогућава елиминисање фактора трошкова за школе са ограниченим буџетима. Поново, због тога што је *GeoGebra* писана у *Javi*, то јој омогућава да ради практично на било којој платформи (*Mac, Windows, Linux*), што додатно елиминише фактор оперативног система за школе са ограниченим буџетима.

Посебно обећавајући приступ подстицања професионалног разговора о приступима у настави је педагошки оквир, илустрован на слици 2, који је развијен током пројекта финансираног од стране Националног центра за изврсност у настави математике (енгл. *National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics –NCETM*) за Енглеску. Пројекат обухвата сарадњу девет искусних наставника у развијању начина пружања професионалног развоја и подршке за друге наставнике широм Енглеске при употреби програма динамичке математике у настави математике, с посебним акцентом на програме отвореног кода попут *GeoGebre* (види Jones и остали, 2009). Пројект је испитивао различите начине подршке наставницима у изградњи њиховог капацитета за развој успјешне технологијом потпомогнуте наставне праксе. Један од исхода је био развој и прикупљање материјала за учионице који се могу користити у настави математике.



Слика 2. Педагошки оквир приступа раду у настави са *GeoGebrom* по *NCETM*

У првом од ових приступа, а тиче се демонстрација наставника, наставници ангажују ученике у разговорима (дискусији) о динамичкој конструкцији уз помоћ *GeoGebre*. Са оваквим приступом, наставник може постављати питања о објектима на екрану (зиду) и тражити да објасне шта они очекују да ће се десити ако су неки дијелови конструкције (конфигурације) премјесте или промијене. Затим било наставник било неки ученик може да промјени неке дијелове конструкције да би провјерили прогнозе дане у одговорима ученика.

Током овог пројекта откривено је да такве демонстрације омогућавају наставницима, који имају мало искуства у коришћењу технологија у настави и учионици, да експериментишу са технологијом уз релативно мали ризик. Поред тога, овај вид коришћења технологија захтјева мање промјена у поставкама учионице и потребује мање ресурса у упоредби са организовањем наставе са ученицима у рачунарском кабинету или са организовањем наставе на преносним рачунарима у редовној учионици (кабинету).

Када наставницима рад са рачунарима постане лежернији (комотнији) за почињу са другим приступом приказаним на слици 2, што подразумева пружање њихових претходно креираних *GeoGebra* датотека ученицима. Са таквим датотекама, креираним од стране наставника, ученици могу да експериментирају (манипулишу) са динамичким објектима. Такав приступ даје јасне границе за ученике, те ученици не губе вријеме за постављање задатака. Дакле, умјесто тога, ученици могу провести више времена истражујући математику и њене основне појмове и законитости, што је и централни задатак у настави математике (да формирају основне математичке појмове). Студија је показала да је приличан број наставника вршио контролу над материјалима, те да овакав приступ, такођер, доводи до нових могућности за развој креативног мишљења и смисла за рјешавање проблемских задатака код ученика.

Током овог пројекта посебно је препозната чињеница да овакав приступ који омогућава ученицима коришћење датотека, које су креирали наставници, да би истражили проблеме може довести до трансформације наставног процеса од стране наставника. Овакав приступ, такођер, подразумева експериментисање наставника са садржајима њихових лекција и усвајање нових приступа који су више истраживачки.

Надаље, овакав приступ може да значајније истакне различите аспекте математике и може изазвати нове радове са различитих полазних тачака, који могу и требају да подстакну дискусију и размјену идеја у учионици.

Ипак, док постоји потенцијал за ангажовање ученика за рад са датотекама креираним од стране наставника, постоји и шанса да неке тако створене датотеке могу довести до стварања, односно развијања већег процедуралног мишљења код ученика.

Трећи приступ приказан на слици 2. подразумева да ученици креирају сопствене датотеке самостално, а у сврху „борбе“ са другим ученицима. Овај приступ пружа власништво над радом и управо тим стварањем власништва ангажује другачији смисао за рјешавање проблема и развијање мишљења. Ту је присутан и развој независности – да науче како да користе *GeoGebra*, и то са више опсега за ученичку креативност и откривање. Студенти бивају маштовитији, стварајући (питајући) сопствена „Шта ако?“ питања, и, као таквима, може им се сопствена употреба *GeoGebra* више допасти, тако да је почињу све чешће користити и код куће. Нема сумње да постоје ризици са таквим приступом; који су такође расправљани од стране учесника радионице по спровођењу пројекта. На примјер, креирање сопствених датотека од стране ученика може бити дуготрајно, или не можемо добити очекивани утицај таквих творевина.

Закључак

GeoGebra је веома разноврстан алат за математичко образовање, посебно у средњим школама. Наставници га могу користити за демонстрације, визуелизације и припрему наставних материјала. Овдје се очекује да су рјешења и про-

цеси рјешавања код наставника веома зависни од њиховог претходног искуства са технологијом уопште, а посебно са *GeoGebra*. Ученици су у могућности моделирати и студирати графичке репрезентације геометријског проблема који укључују компликоване алгебарске изразе, које је другачије немогуће схватити. Надаље, ученици могу да га користе као динамичко средство (алат) како би откривали математику самостално. Коначно, важна су сљедећа питања са педагошко–математичког аспекта: могућности скалирања, могућност доласка до изненађујућих открића и истраживања њихова поријекла, могућност динамичке промјене параметара како би се боље цијениле фамилије тачака, правих, полигона, кругова итд.

Успркос свом великом образовном потенцијалу, и даље смо свијесни да се *GeoGebra*, и кад се користи, не прилагођава настави геометрије у складу који је са наставним плановима и програмима, што посебно вриједи у нашој ближој регији, што нас може потакнути да размишљамо о неким измјенама у тим наставним плановима и програмима кад је у питању настава геометрије. Надаље, имамо јако увјерење да је принцип континуитета значајан за правилно разумијевање геометрије, као и да нове могућности софтвера попут *GeoGebra* – мислимо на математичке могућности, а не на *Internet* подршку – представљају изузетно добру, лагану и занимљиву прилику за унапређење рада у настави геометрије. Тренд је у повратку коријенима модерне геометрије, како би користили више овај предивни дио математике уз помоћ рачунара, а све у сврху побољшања исхода учења математике. Са *GeoGebra* у нашим учионицама ћемо имати прилику да одемо новим путевима у чаробни свијет математике и математичког образовања.

Литература

- Clark, R. C., Mayer, R. E., E-Learning and the Science of Instruction. San Francisco: Pfeiffer 2003.
- Hohenwarter, M., Preiner, J., Design guidelines for dynamic mathematics worksheets. Teaching Mathematics and Computer Science (2008).
- Howard, B. C., McGee, S., Schwartz, N., Purcell, S., The experience of constructivism: Transforming teacher epistemology. Journal of Research on Computing in Education, 32 (4), (2000), 455–462.
- Jones, K., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Lu, A., Dawes, M., Parish, A., Borchers, M., Establishing a professional development network to support teachers using dynamic mathematics software GeoGebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 29 (1), (2009), 97–102.
- Lawless, K., Pellegrino, J. W., Professional development in integrating technology into teaching and learning: Knowns, unknowns, and ways to pursue better questions and answers. Review of Educational Research, 77 (4), (2007), 575–614.
- Moyer, P., Bolyard, J., Spikell, M., What are virtual manipulatives? Teaching Children Mathematics, 8 (6), (2002), 372.

Preiner, J., Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: the case of GeoGebra. Dissertation in Mathematics Education, Faculty of Natural Sciences, University of Salzburg, 2008.

Schellenberg, D., GeoGebra in the Secondary Mathematics Classroom: A Literature Review. GeoGebra in the Secondary Mathematics (2009).

Anton Vrdoljak, M. A., Miroslav Banjanin, Ph. D., Novi Sad

EDUCATIONAL POTENTIAL OF THE CURRICULUM FOR DYNAMIC MATHEMATICS: GEOGEBRA CASE

Summary

Curriculum for dynamic mathematics in dynamic teaching environment is nowadays considered the best possible solution for stimulating the process of active teaching activity. Recently, there are numerous studies which showed that technology include substantial educational potential for the development of students' basic skills as well as for broadening their knowledge. The article deals with GeoGebra, a software program for dynamic mathematics which successfully integrates geometry, algebra and analysis. It is designed for teaching mathematics in school. The software has an open code, it is free of charge for everybody, and could be run on several platforms. The idea that resulted in writing this article, had the objective to find out whether and how much does GeoGebra contribute better knowledge and skill retention in the case of dynamic teaching activity?

Key words: teaching mathematics, geometry, algebra, technologies in teaching activity, professional development, educational potentials, GeoGebra

М-р Антон Врдољак, Мостар, д-р Милорад Банјанин

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ: СЛУЧАЙ GEOGEBRA

Резюме

Программы для динамической математики с их динамическим окружением для изучения, считаются сегодня лучшим способом для побуждения процесса активного учения. В последнее время существуют многие научные труды показавшие, что технологии имеют значительные образовательные потенциалы,

возможности в развитии основных умений у учеников и в расширении их знаний. В настоящей работе авторы сфокусировались на Geogebra, вид программы для динамической математики, которая взаимосвязывает геометрию, алгебру и анализ, которая развита для обучения математике в школах. Программа имеет открытый код, бесплатный для всех и её можно перемещать на несколько платформ. Идея, результатом которой произошла настоящая работа, имела своей целью исследовать в какой мере Geogebra может помочь улучшению приобретения знаний и умений у учеников в случае динамического обучения и учения в процессе обучения математики.

Опорные слова: процесс обучения математики, геометрия, алгебра, технологии в процессе обучения, профессиональное развитие, образовательные возможности, Geogebra

Мр Наталија Будински

Основна школа и гимназија „Петро Кузмјак“

Руски Крстур

UDK 371.3::51

UDK 371::514]:745.54

Стручни чланак

Примљен: 25. XII 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 932–943

ОРИГАМИ – ПРИМЕР ЗА ПРИМЕНУ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Резиме

У раду се даје пример оригамија у настави математике као начина за побољшање часова геометрије у средњој школи. Оригами ученицима на интересантан начин приближава геометријска тела. Ова древна јапанска вештина може допринети да ученици боље схвате полиедре. Ученици уз упутства и инструкције наставника праве разне полиедре и проучавају њихова својства. Укључивање оригамија у класичну наставу математике може побољшати њен квалитет.

Кључне речи: полиедри, оригами, настава математике

Увод

Оригами је јапанска вештина савијања папира (*ori* – савијање, *kami* – папир). Дефиниција оригамија каже да се савија папир без употребе маказа и лепка, а резултат тог савијања су разноврсни облици који имитирају живу и неживу природу, оно што користимо у свакодневном животу и оно што нас окружује.

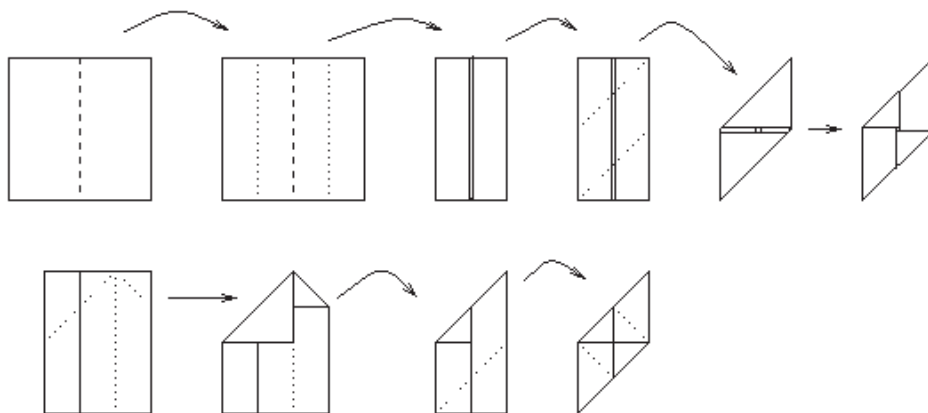
Настава математике и оригами

Древна јапанска вештина оригами може се употребити на часовима математике везаним за полиедре. Савијање папира у тродимензионални објекат својеврсна је геометријска вежба. Учење математике преко модела из непосредног окружења ученика и нови методи у настави математике као што је учење откривањем, побољшавају наставни процес и повећавају интересовање и мотивацију ученика. Овај рад даје један пример примене оригамија у настави математике.

Обрадом геометрије током наставног процеса ученици уче да препознају геометријске облике, фигуре и тела као и да анализирају њихове односе и карактеристике (Бокес). Да би решили проблемске задатке ученици треба да имају визуелну

и просторну представу о моделу на који се задатак односи. У циљу побољшања и развијања геометријских могућности ученике треба подстицати да истражују, праве modele геометријских тела које проучавају теоријски на часовима математике. Према програму Републике Србије (Службени гласник РС) полиедри се обрађују у трећем разреду средње школе. Предвиђено је да кроз обраду ове теме ученици продубе своја знања која су о полиедрима стекли у основној школи. Како су ученици усвојили основне појмове и чињенице из просторне геометрије то задаци треба буду орјентисани на проблеме практичне природе како би ученици видели да се изучавање просторних фигура широко користи у пракси. Посебну пажњу треба посветити развијању логичког мишљења и просторних представа ученика, чему може у извесној мери допринети разумно позивање на очигледност, коришћење модела, па и приручних средстава и правилно скицарање фигура.

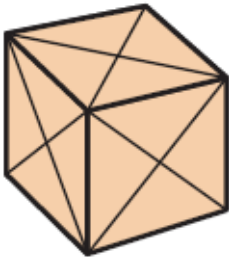
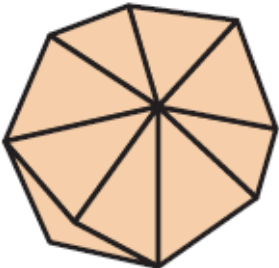
Оригами је активност која отвара многе могућности у настави математике јер оригами уводи имлицитно сложене геометријске појмове. На тај начин ученици уче математику и геометрију без сложене математичке терминологије. Ученици треба да размишљају шта ће добити као резултат савијања папира, на пример савијањем папира паралелно са ивицом папира, сам папир се дели на два дела. Ученици треба да упореде моделе које добијају различитим савијањем папира. Неки модели могу да се употребе као основа за друге сложеније моделе. Слична савијања могу да дају различите моделе. Постоје различити начини да се направи полиедар без маказа и лепка. Сонобе полиедри су један од најједноставнијих за учење и за прављење. На Слици 1. дато је упутство за прављење једног делића.



Слика 1.

Описана оригами метода односи се на прављење малих делова који се затим слажу у сложеније, тј. у различите полиедре. Тако, на пример, тетраедар се саставља од три делића, а коцка од шест. Оваква врста оригамија се још назива и модуларни оригами и он се разликује од традиционалног оригамија. У традицио-

налном оригамију конструкције се изводе коришћењем једног листа папира који има облик квадрата или правоугаоника, док се у модуларном оригамију делови повезују у једну целину. У следећој табели дат је преглед из колико делића се прави одговарајући полиедар.

Модел	Облик	Број делића
Тетраедар		3
Мала коцка		6
Велика коцка		12
Звездасти октаедар		12



Разумевање мреже полиедра омогућава лакше решавање задатка. Мрежом полиедра представљају се ивице и темена. На пример, коцка коју су ученици правили техникама оригамија је много „ближа“ кад направе њен модел, окрену је и посматрају је из различитих углова. На тај начин лакше могу да уоче делове коцке које нису у могућности да виде скицом, а то им омогућава да лакше разумеју компликована геометријска тела.

Математички појмови везани за полиедре који се могу обрадити преко оригамија

Полазећи од дефиниција као што су диједар (Унија две разне затворене полуправни са заједничком ивицом (Првановић)) и рогљаста површ (Нека је тачка В која не припада равни многоугла $A_1A_2...A_n$. Унија свих полуправа са заједничким почетком В које секу затворену изломљену линију $A_1A_2...A_n$ назива се n -то страна рогљаста површ (Војводић, Паунић, Тошић)) ученици помоћу делића могу их и направити. Сам поступак оригами склапања полиедара се садржи у томе да се склапају по три сонобе делића који граде рогља. Касније се ти рогљеви склапају у геометријска тела – полиедре. На тај начин се ученици визуелно упознају са рогљем. Приликом слагања делића и рогљева ученици се могу упознати и са тачношћу следећег тврђења које се у средњој школи изводе без доказа. (Кечкић)

Теорема: Збир ивичних углова било ког конвексног рогља је мањи од 360° .

Прављењем полиедара од папира ученици истовремено понављају основне појмове о полиедрима као што је сама дефиниција полиедара и полиедарске површи:

Полиедарска површ је унија коначног скупа многоуглова који задовољавају следеће услове:

- За свака два несуседна многоугла M и M' из тог скупа постоји низ многоуглова $M, M_1, M_2, ..., M_n, M'$ образован од многоуглова тог скупа, тако да су свака два узастопна многоугла у низу суседни.

- Заједничка ивица свака два узастопна многоугла није ивица ниједног другог многоугла.
- Два несуседна многоугла су или дисјунктни или им је пресек једно заједничко теме за та два многоугла (Кечкић).

Оригами даје могућности да се ученици информативно упознају и са полиедарским површима које нису просте (Слика 3). Прављењем различитих геометријских тела као што су коцка, тетраедар, ученици имају бољу представу о појмовима као што су ивице и темена полиедара, као и унутрашњост и спољашњост полиедра. Појам конвексности и конкавности (Слика 2. и 3) се, такође, може илустровати прављењем различитих полиедара помоћу оригамија.

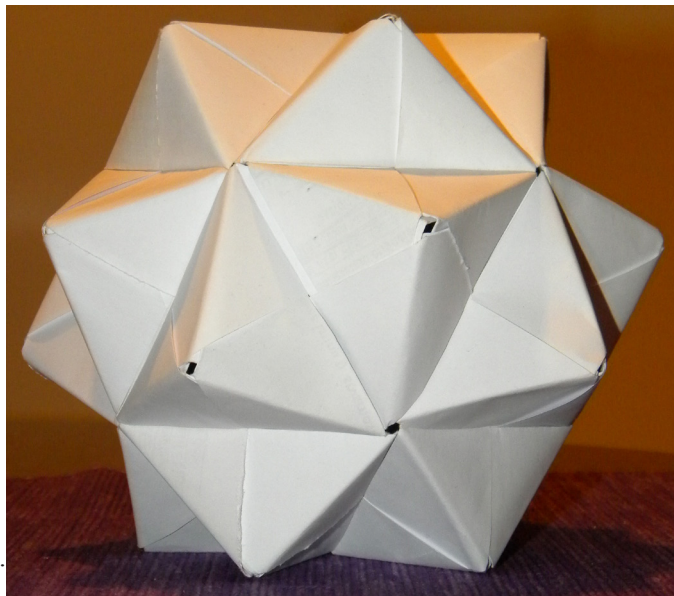
Општа тврђења за конвексне полиедре као што су (Кечкић):

- Број ивичних углова је два пута већи од броја ивица,
- Сума свих ивичних углова конвексног полиедра који има t темена $S=(t-2)360^\circ$,
- Важи Ојлерова теорема $t+s=i+2$, t је број темена, s број страна, i број ивица конвексног полиедра, могу се, такође, илустровати помоћу модела направљених техником оригамија.

Педагошки експеримент

Оригами на часовима математике примењен је са ученицима трећег разреда Основне школе и гимназије „Петро Кузмјак“ у школској 2008/09. и 2009/10.

Први пут, школске 2008/09. године, оригами је примењен на два часа математике једног одељења трећег разреда. Други пут оригами је примењен школске 2009/10. године на часовима математике (такође, на два часа) у оквиру наставне области полиедри у три одељења трећег разреда исте гимназије. Ученицима је остављена могућност да раде по групама и да свака група прави посебан модел. Идеја је била да ученици унутар групе треба да сарађују, да покушају да приступе проблему на различите начине, да презентују своје резултате. Подељена су им упутства и они су самостално правили полиедре. Упутства која су ученици добили односила су се на прављење пирамиде и призме (коцке, Слика 2), али и сложенијих полиедара као на Слици 3. На Слици 2. и Слици 3. приказани су радови ученика, полиедри направљени помоћу технике оригамија.



Слика 3.

На оваком часу улога наставика је побољшана, он осим улоге предавача има и улогу инструктора. Он је пратио прављење полиедара од папира, а истовремено је ученицима усмеравао пажњу на важне геометријске појмове и подстицао је повезивање знања стеченог на традиционалан начин и знања стеченог путем прављења модела. На часу би требало да се створи атмосфера тимског рада. Позитивне изјаве ученика потврђују добре особине и резултате примене оригамија на часовима математике:

1. „Овакав начин развија педантност и логику. Потребно је да будемо прецизни и стрпљиви, а то су особине које су нам јако потребне у овом брзом и модерном свету“, Петар.
2. „Мислим да је добра ствар да се у настави математике не само рачуна, већ да се уведу и неке интересантне ствари у вези са математиком. Баш смо се сви укључили у израду и било је супер“, Данијела.
3. „Помогло ми је да развијем прецизност, коју нисам знао ни да имам. Оригами нас је натерао да размишљамо, а при том да будемо опуштени. Код мене је пробудио интересовање да више истражим сложеније форме и да их направим“, Марко.
4. „Веома лепо од професора да нам је показао нешто ново и интересно из математике, а да то нису задаци. Веома ми се допада“, Марина.

Закључак

Увођење оригамија у наставу математике повољно утиче на представу ученика о геометријским телима. Он обогаћује традиционалну наставу, чини је динамичнијом и интересантнијом.

Основно правило учења је да када чујемо заборавимо, када видимо запамтимо, а када сами урадимо разумемо. Оригами покрива сва три елемента. Преко оригамија ученици математику упознају у новом контексту који им огућава истраживање нових идеја. Оригами, према литератури (Бокес), комбинује слушање, посматрање, активност израде и праћење инструкција.

Оригами има огроман потенцијал који се може искористити у настави математике у комбинацији са традиционалном наставом геометрије у нашим школама. Занимљив, забаван и поучан, а имајући у виду да једино папир потребан за рад, оригами се може наћи широку примену у настави математике у свим школама у циљу мотивације ученика за даља истраживања из области полиедара.

Литература

- Градимиr Војводић, Ђура Паунић, Ратко Тошић (2003). Математика са збирком задатака за 3. разред средње школе, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.
- Isao Honda, Origami-zabava preklapanja, Publikum, Sombor.
- Јован Д. Кечкић (1998). Математика за трећи разред средње школе са збирком задатака, Завод за издавање уџбеника и наставна средства, Београд.
- Ljerka Jukić (2007). Matematika i origami, Osječki matematički list 7, 23-32.
- Mileva Prvanović (1980). Osnovi geometrije, Građevinska knjiga, Beograd.
- Norma J. Boakes (2009). Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students, Online Research in Middle Level Education, Volume 32, Number 7, ISSN 1940-4476.
- Службени гласник РС – Просветни гласник, стр. 185, бр. 3, 31. мај 1991. године.
- www.math.Isu.edu

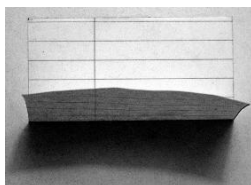
Прилог 1



1. Исеците квадрат од папира.



2. Прецизно га хоризонтално преполовите



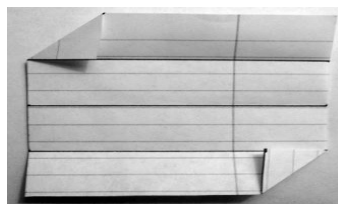
3. Поделите квадрат на пола по тој линији.



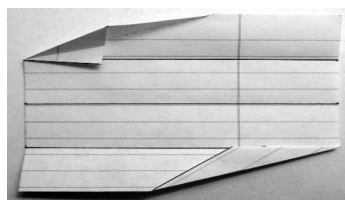
4. Наставите пресавијање папира да би се направиле четвртине.



5. Затим поравнајте папир.



6. Узмите доњу ивицу папира и савијте је према првој четвртини папира. Затим окрените папир за 180 степени и урадите исто тако да се направе два мала троугла.



7. Затим на половини доње ивице савијте угао тако да један крак троугла належе на четвртину папира као на слици. Окрените папир за 180 степени и урадите исто.



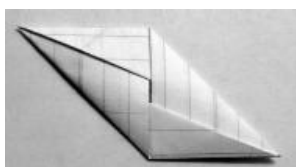
8. Пресавијте папир тако да се доње ивице папира споје на половини папира као на слици.



9. Пресавијте доњи леви угао и савијте доњи део папира на половини према горе. Окрените направљено за 180 степени и поновите поступак. Треба да се добије паралелограм. Затим је неопходно увући велики савијени троугао у папир као на слици:



10. Леви савијени део увући, док десни савијени део није подвучен. Затим ротирајте папир за угао од 180 степени и увуците у други савијени део да би се добила следећа фигура:

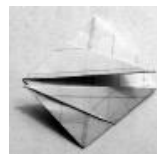


11. Ову фигуру окрените да би то изгледало као на предходној слици

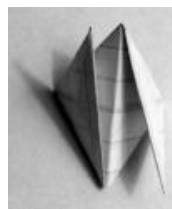
12. Савијте доњи део тако да би се суседна темена паралелограма састала као на слици:



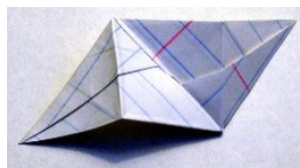
13. Ротирајте за 180 степени и поновите поступак да би се добила фигура као на слици:



14. Затим савијте папир на средини да би се добила фигура као на слици:



15. Завршна фигура треба да изгледа:



Прављење модела:

Кад се направи један делић као горе, у односу који модел хоћете направити, број делића се понавља. Даље су наведена упутства за моделе који се могу направити помоћу датих делића.

1. Коцка (шупља коцка), потребно је шест делића
2. Октаедрон, октаедар (звездасти октаедрон), потребно је 12 делића.
3. Икосаедрон, икосаедар (звездасти икосаедрон), потребно је 30 делића.

16. Ако се прво прави коцка треба направити 6 делића. Сваки делић има два темена и две шупљине, такозване цепове који омогућавају да се делићи спајају. Како се делићи спајају илустровано је на следећој слици:



Када се два делића саставе, треба направити угао код цепа, мало издигнути:



17. Затим се трећи делић спаја са прва два делића:



18. И сва три делића се причврсте као на слици:



19. Постоји слободан угао, тј. теме као и слободан цеп које треба повезати. Фомирану тродимензионалну структуру можемо назвати врх. То ће бити један део геометријске фигуре, у овом случају коцке.

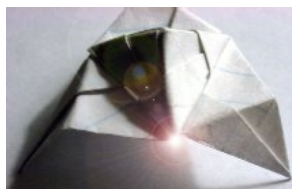


20. Врх представља кључни градивни део модела. Коцка се састоји од три врха која треба склопити. Треба бити пажљив јер се један делић може налазити у више врхова.



Коцка

21. Око сваке тачке у моделу се налазе три врха. На слици је означено на коју се тачку мисли.



Тачка је повезана са три врха.
Доле је приказана слика октаедра, са тачком у средини слике. Око тачке у октаедру налазе се четири врха.



22. Октаедар

23. Код икосаедра око сваке тачке налази се пет врхова.



24. Прављење модела би требало да буде једноставно. Направите одговарајући број делића (6, 12 или 30), а затим спојите 3, 4 или 5 врхова око сваке тачке све док имате делића и док не затворите модел коцке, октаедра или икосаедра. На слици доле се виде две тачке икосаедра и око њих по пет врхова.



25. На следећој слици доле је икосаедар коме недостаје три делића. То значи да је модел скоро готов. Треба бити пажљив јер последње делиће је најтеже склопити.



Да би се формирао завршни модел, треба почети са врхом и додавати делиће у круг да би се формирали врхови све док тачка није окружена са 3, 4 или 5 врхова. Затим формирати више тачака додавањем све више делића да би се направило више врхова. Постепено, модел ће се сам заокружљивати све док се не затвори. Да би модели изгледали лепше делиће треба правити од папира у разним бојама.

Natalija Budimski, M .A., Ruski Krstur

ORIGAMI – AN EXAMPLE FOR APPLICATION IN TEACHING MATHEMATICS

Summary

The article presents an example of using origami in teaching mathematics as an advancement in teaching geometry in secondary school. Origami provides better understanding of geometric bodies in an interesting way. This ancient Japanese skill can contribute in learning polyhedra. While following teachers instructions and assistance, pupils make different polyhedra and examine their properties. Applying origami in classic teaching activity could substantially raise its quality.

Key words: polyhedra, origami, teaching mathematics

М-р Наталија Будински, Руски Крстур

ОРИГАМИ – ПРИМЕР ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Резюме

В настоящей работе автор представил один пример применения оригами техники в процессе обучения математики, как формы улучшения уроков геометрии в средней школе. Оригами техника ученикам интересным способом приближает геометрические тела. Это древнее японское умение может помочь ученикам лучше понять полиэдры, многогранники. Ученики при помощи инструкций и наставлений учителя делают разные полиэдры и изучают их характеристики. Включение оригами техники в традиционное обучение математике может улучшить его качество.

Опорные слова: полиэдры, оригами техника, процесс обучения, математики

Др Зорана Лужанин
Природно-математички факултет
Нови Сад

UDK 371.3::51
UDK 371.3::004
UDK 378.147:[373.5:371.3
Прегледни чланак
Примљен: 25. XII 2009.
BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 944–954

ЈЕДАН ПОГЛЕД НА КВАЛИТЕТ УНИВЕРЗИТЕТСКЕ НАСТАВЕ

Резиме

У раду је разматран један аспект квалитета универзитетске наставе у области студија математике, примењене математике и информатике, а који, у одређеној мери зависи од квалитета наставе у средњој школи. Основно обележје које је разматрано јесте предзнање студента за слушање предмета на студијским програмима, које у значајној мери утиче на квалитет наставе. Сprovedено истраживање показало је да постоји значајан простор за подизање квалитета предзнања, пре свега на почетној години студија.

Увод

Оцена и праћење квалитета наставе на свим нивоима образовања представља потребан услов за постизање све бољих и вреднијих резултата у области образовања. Реформе образовања у Републици Србији покренуте су у основном и високом образовању, док се средњошколско образовање за такве реформе тек припрема. Усклађеност реформи на свим нивоима образовања требало би да буде један од одлучујућих фактора унапређења квалитета. У овом раду, кроз пример са студија математике, примењене математике и информатике, дате су неке анализе који могу имати значајне реперкусије на квалитетније одржавање универзитетске наставе.

У 2. секцији дат је осврт на једну могућу везу средњошколског и високог образовања. Предмет истраживања, приказ узорка и начини прикупљања података везаних за емпиријске податке коришћене у анализи квалитета наставе приказани су у 3. секцији. Резултати и анализа резултата истраживања дати су у 4. секцији. Завршна разматрања представљена су у 5. делу.

Повезаност средњег и високог образовања

Познато је, да за разлику од основног и средњошколског образовања, високо образовање функционише по знатно другачијим правилима. Свакако једна од најважнијих разлика јесте потпуна аутономија Универзитета, односно факултета, у формирању студијских програма. Са једне стране то омогућује стварање позитивне конкуренције међу факултетима, али са друге стране може довести и до неких потешкоћа у реализацији уколико се студијски програм формира без адекватних консултација. Да ли су садржаји на првој години студија усклађени са знањем које студенти доносе из средњих школа, да ли су на вишим годинама садржаји предмета у довољној мери ослоњени на знања која су студенти стекли из већ одслушаних или положених испита, да ли студенти „осете” примењивост знања које треба да стекну итд. Предуслов за успешно стицање знања свакако чини и добра мотивација, која се може постићи на различите начине. Једна од могућности је занимљивост садржаја из угла студената, а не наставника који изводе наставу.

Са друге стране, студенти долазе са већ формираним ставовима везаним за начин учења, провере знања и оцењивања. Из тих разлога је високо образовање готово немогуће посматрати одвојено од основног и средњег образовања. У погледу реформи, високо образовање тренутно предњачи захваљујући прихватању Болоњске декларације. Увођење континуалног праћења рада студената и ЕСПБ (Европског система преноса бодова), две су највеће новине које су реформе донеле. Поставља се питање колико су свршени средњошколци спремни да прихвате нови начин студирања и да ли је збиља олакшан прелазак са средњошколског на високо образовање.

Законом о високом образовању, за просечног студента предвиђена је четрдесетсатна радна недеља која се састоји од минимално 20 часова активне наставе. Активна настава је време које студент проведе на предавањима, вежбама и осталим облицима наставе. Допуну до 40 сати рада студент остварује кроз самостални рад. Да ли је, након завршене средње школе, просечни средњошколац спреман да пређе на овакав начин рада с обзиром да је, на пример у гимназији, просечан број часова активне наставе 31 или 32 часа. Време које средњошколац проведе у самосталном раду није прецизно квантификовано, али се може претпоставити да радна недеља просечног гимназијалца прелази 40 радних сати. Питање на које свакако треба наћи одговор јесте да ли је оптерећење ученика у средњим школама примерено њиховом узрасту и није ли нелогично да је за савлађивање студијских програма потребна мања количина уложеног рада него за завршетак гимназије.

Планови и програми наставе у средњим школама прописани су од стране Министарства просвете. Начин њихове реализације, као и провера знања ученика, међутим, препуштени су професорима. Због непостојања стандардних провера знања доводи се у питање и значај оценоу коју ученици добијају из појединих предмета. Колико је она објективна и колико заиста показује ниво знања које

ученик има? Пријемни испит на факултетима требало би, барем донекле, да уједначи предзнање са којим ће студенти започети студије, али то је у пракси веома тешко изводљиво. Наиме, и пријемни испити на неким факултетима имитирају пријемни испит за средње школе у том смислу што се из скупа познатих задатака или питања одабира део за пријемни испит. Разлог за велику нехомогеност међу студентима прве године ваља тражити и у различитости средњих школа које су претходно завршили. За већину студијских програма формално је довољно завршити било коју четворогодишњу средњу школу. На пример, основне студије математике могу се уписати и након завршеног природно-математичког смера у гимназијама, али и након завршене средње медицинске или средње музичке школе.

Структура узорка и начин прикупљања података

Акредитација високошколских установа донела је значајан помак у сагледавању тренутне ситуације високог образовања, али, што је од највеће важности, увела је значајне промене које воде квалитетнијим студијским програмима. Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду акредитовао се у првом кругу акредитације, у априлу 2008. са својих 38 студијских програма. Стандарди за акредитацију наметнули су обавезу самовредновања установе најмање једном у три године. Већ први поступак самовредновања показао је своју оправданост, јер се кроз овај поступак јасно уочавају предности и мане студијских програма, а затим доносе одговарајуће превентивне и корективне мере у циљу отклањања недостатака и подизања квалитета. Објективан увид у мишљење студената, пре свега кроз студентске анкете, један је од најважнијих инструмената у поступку самовредновања. У наставку овог рада биће презентовани неки од резултата студентских анкета који су везани за питања универзитетске наставе, о којима је било речи у уводном делу рада.

Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду спада у групу факултета који на конструктиван начин уважавају мишљење студената. У току 2007. године, Природно-математички факултет је детаљно развио поступке самовредновања кроз низ правилника и других аката, те је на тај начин омогућио систематично прикупљање мишљења и доношења одлука о побољшању квалитета наставног процеса.

Мотивисани наставници и истраживачи, задовољни студенти и ненаставно особље, предуслов су за успешно испуњење циљева Факултета, па из тих разлога ПМФ активно укључује све субјекте у процес обезбеђивања квалитета.

ПМФ непрекидно ради на усавршавању својих студијских програма. Почетком ове деценије студијски програми су неколико пута усклађивани са друштвеним потребама и околностима. Факултет је у поступку доношења новог Закона о високом образовању (2005. године) кориговао своје студијске програме, тако да је био спреман да понуди квалитетне студијске програме усклађене са Болоњском декларацијом.

У овом раду биће разматран однос који студенти показују према наставним садржајима на студијским програмима који су били реализовани школске 2007/08. на Департману за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду.

Студијски програми могу се поделити у три веће целине: студије из математике, примењене математике и информатике. Прва генерација уписана по Закону о високом образовању, а усклађена са Болоњском декларацијом, уписана је школске 2006/07. Из тих разлога студенти прве и друге године који су укључени у анкетање, похађали су основне студије првог нивоа, док су студенти треће и четврте године похађали дипломске студије по Закону о Универзитету.

У циљу прикупљања података, извршено је анкетање из 96 реализованих предмета у току школске 2007/08. године и прикупљено је укупно 1254 анкете о оцени предмета, наставника и сарадника. У овом раду бавићемо се анализом резултата добијених из Упитника за евалуацију наставног процеса (по предметима) који су попуњавали студенти, а који је саставни део у поступку самовредновања на основу Правилника о самовредновању студија, педагошког рада наставника и услова рада. Упитник се састоји од 9 питања, а то су:

1. Општа оцена курса (оцена од 5 до 10)
2. Предзнање које сам имао/ла било је довољно за праћење наставе (слажем се у потпуности; делимично се слажем; не слажем се; не могу да проценим)
3. Материја је добро структурирана и изложена на разумљив начин (слажем се у потпуности; делимично се слажем; не слажем се; не могу да проценим)
4. Наставни садржаји су занимљиви (слажем се у потпуности; делимично се слажем; не слажем се; не могу да проценим)
5. Наставни садржаји су савремени (слажем се у потпуности; делимично се слажем; не слажем се; не могу да проценим)
6. Наставни садржаји су примењиви у пракси (слажем се у потпуности; делимично се слажем; не слажем се; не могу да проценим)
7. Литература је доступна у форми (уџбеника; збирке; скрипте; страних издања; електронског материјала доступног на Web сајту)
8. Доступна литература је адекватна за савлађивање градива (слажем се у потпуности; делимично се слажем; не слажем се; не могу да проценим)
9. Очекујем да ћу добити оцену (оцена од 5 до 10).

Студенти су, након 11-12 радних недеља, попуњавали упитнике на часу предавања из предмета који оцењују. Из тих разлога искључена је субјективност студента која би могла бити резултат претходног полагања испита.

Од укупно 2623 попуњена упитника, 607 (23,14%) везани су за предмете на студијама математике, 1254 (47,81%) са студија примењене математике и 762 (29,05%) са студија информатике.

Студенти прве године попунили су 1011 (38,63%), студенти друге године 792 (30,26%), треће године 480 (18,34%), а четврте 325 (12,42%) упитника¹. Студије математике, примењене математике и информатике, највећим делом су финансиране из буџета, па је тако само 3,89% упитника попуњено од стране самофинансирајућих студената, односно 96,11% су попунили студенти који се финансирају из буџета.

Једна од карактеристика студија на нашим високошколским установама јесте да се једном одслушан предмет, без обзира на постигнути исход на испиту, не мора поново слушати. Примена Закона о високом образовању и усклађивање са Болоњском декларацијом требало би да измени тренутну ситуацију. Према томе, студенти који нису успешно положили испит у једној школској години, мораће поново да похађају наставу у наредној школској години уколико желе да изађу на тај испит. Што се тиче наслеђеног стања, делом због недостатка простора, делом због немогућности измене распореда наставе, овакав вид поновног слушања још увек није заживео на прави начин. Због свега наведеног чак 98,57% попуњених упитника потиче од стране студената који по први пут слушају предмет.

Студенти информатике учествовали су у попуњавању упитника на 52 предмета, студенти примењене математике на 39, а математике на 35 предмета. Треба истаћи да су неки предмети заједнички за две или три групе студената. Због велике изборности која се пружа студентима на студијама на Департману за математику и информатику, као и због одлуке Департамана да се настава одржава без обзира на број студената који су пријављени за слушање предмета, број студента који су попуњавали упитнике по предмети креће се од 2 студента до 105 студената. На 8 предмета учествовало је више од 80 студената, на 11 предмета број студената је био између 40 и 79, на 24 предмета број студената је био између 20 и 39, између 10 и 19 студената било је на 31 предмету, док је на 24 предмета број студената који су попуњавали анкету био испод 10.

Резултати

Питање од изузетне важности за квалитет студијског програма јесте процена студената о предзнању за праћење предмета. Резултати приказани у Табели 1. и на Слици 1, указују на чињеницу да постоји велики простор за подизање квалитета наставе, будући да је мање од пола испитаника (41,15%) одговорило да сматра да је предзнање које су имали у потпуности довољно за праћење наставе из предмета. На основу добијених резултата може се закључити да постоји значајна хетерогеност између група студената које слушају појединачни предмет, што од наставника у припреми и извођењу наставе изискује значајне напоре.

¹ Девет упитника попуњено је од стране студената пете године који нису узети у разматрање, јер су у току 2007/08. године студије на мастер студијама претежно одржаване кроз менторски рад.

<i>мишљење</i>	<i>број студен.</i>	<i>проценат</i>
без	104	3,98%
не слаже се	400	15,30%
делимично	1035	39,58%
потпуно	1076	41,15%



Табела 1.

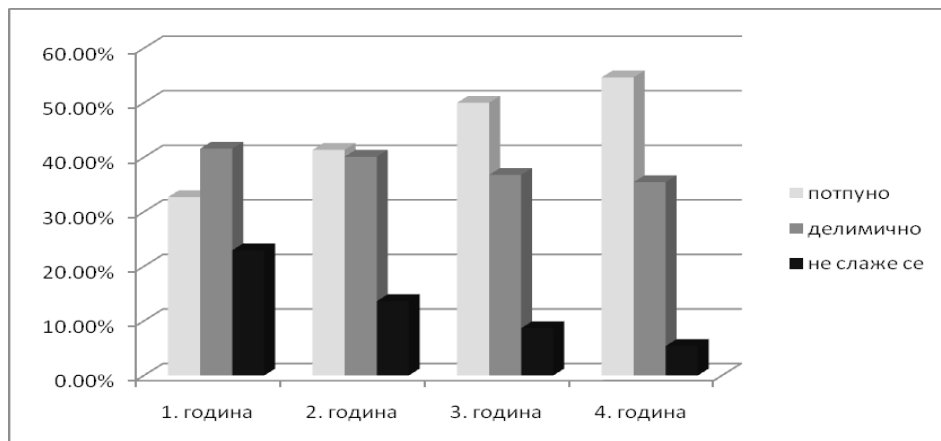
Слика 1.

Веома је важно уочити одговоре студента на различитим годинама студија. Резултати су приказани у Табели 2. и на Слици 2. Проценат студента који своје знање процењују као недовољно рапидно опада са порастом године студија. На првој години је близу четвртине одговора (22,96%) гласило да предзнање није довољно, а само 32,71% се сложило да предзнање у потпуности задовољава. Са друге стране, на завршној, 4. години студија, број одговора да је знање недовољно опало је на 5,41%, док је проценат одговора да је предзнање у потпуности довољно, премашило половину и износи 54,46%. Оваква дистрибуција одговора омогућава следеће закључке:

- свршени средњошколци немају довољно предзнања за квалитетно праћење наставе на студијама или, пак, садржаји премета на 1. години студија нису усклађени са предзнањем које студенти доносе из средње школе; Такође, један од битних фактора је изузетна хетерогеност средњих школа које су завршили студенти прве године.
- курикулуми студијских програма добро су конципирани по садржају, јер проценат студената који су своје предзнање проценили као потпуно или делимично довољно расте кроз године студија, и на завршној години достиже 89,09%.

	1. година	2. година	3. година	4. година
потпуно	32,71%	41,36%	50,00%	54,65%
делимично	41,58%	40,10%	36,78%	35,44%
не слажем се	22,96%	13,62%	8,68%	5,41%
без	2,76%	4,92%	4,55%	4,50%

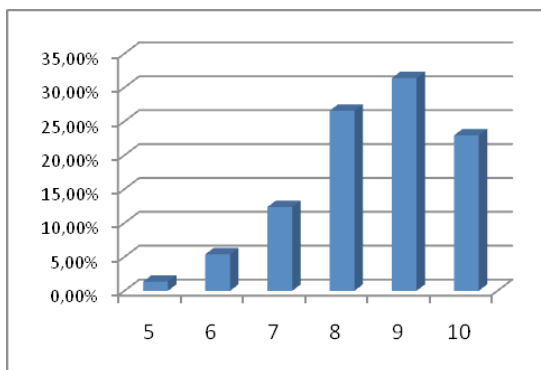
Табела 2: Процентуални приказ одговора студената по годинама студија



Слика 2: Да ли је предзнање за слушање предмета довољно?

Просечна оцена курса је 8,5 са стандардним одступањем 1,2. Расподела оцена приказана је у табели и на Слици 3. Овако висока оцена, као и чињеница да је свега 1,36% студената дало најслабију оцену, а чак 54,32% оцену 9 или 10, може наметнути закључак да су предмети добро конципирани и да су њихови садржаји задовољавајући. У закључивању, међутим, треба бити веома обазрив и то из следећег разлога. Важно је имати у виду да општа оцена курса укључује све карактеристике наставе и да студенти не располажу нити искуством нити знањем о томе које све сегменте треба да посматрају и на који начин да формирају оцену курса. Због тога би се ова оцена могла довести у питање, тј. могла би се сматрати само субјективним ставом студената, јер је приликом одређивања оцене свако користио сопствена правила. Други разлог за овако високу оцену може се наћи у високој корелацији са оценом коју студенти очекују, о чему ће бити речи у наставку рада.

оцена	број студен.	процент
5	33	1,36%
6	131	5,38%
7	301	12,37%
8	647	26,58%
9	764	31,39%
10	558	22,93%

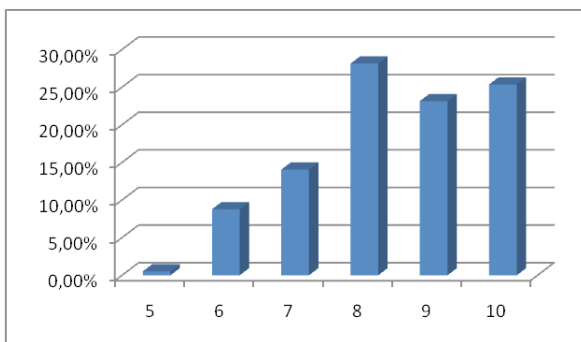


Табела 3.

Слика 3.

Расподела оцена коју студенти очекују из предмета (Табела 4, Слика 4) указују на још једну специфичност везану за студенте на нашим универзитетима. Просечна оцена коју студенти очекују износи 8,4, са стандардним одступањем 1,27. Свакако треба уочити да чак 48,51% очекиваних оцена јесу 9 или 10. Ово се свакако не може уклопити у препоруке да расподеле оцена треба да се повинују нормалној расподели, што значи да подједнак број студената очекује оцену 6 или 10. Међутим, у разматраном истраживању тај однос износи 25,36% према 8,78%, у корист оцене 10. Чињеница да више од четвртине студената очекује оцену 10 указује на то да је потребно преиспитати поступке оцењивања и у основним и средњим школама, као и на универзитетима.

оцена	број студен.	проценат
5	13	0,52%
6	218	8,78%
7	349	14,05%
8	699	28,14%
9	575	23,15%
10	630	25,36%



Табела 4.

Слика 4.

У даљем раду анализираћемо међусобне везе неких од претходно наведених обележја. Поставља се питање да ли квалитет предзнања утиче на оцену коју ће студент дати предмету, као и на оцену коју очекује. У Табели 5. приказане су просечна оцена курса унутар група студената које су формиране на основу процене предзнања. Студенти који су своје предзнање проценили као потпуно довољно, оценили су курс средњом оценом 8,97, што за више од једне оцене премашује средњу оцену 7,82 добијену од групе студената који су своје предзнање проценили као недовољно. Применом F-теста тестирана је хипотеза да не постоји статистички значајна разлика у средњим оценама у 4 групе студента, односно да средња вредност оцене курса не зависи од процене предзнања студената. Добијена F-вредност је 116,49, а одговарајућа *p*-вредност је мања од 0,05, на основу чега закључујемо да ниво предзнања утиче на оцену којом ће студент оценити дати предмет. Са проценом квалитета предзнања расте и просечна оцена курса.

<i>предзнање</i>	<i>број студ.</i>	<i>сред. вред.</i>	<i>стан. одст.</i>
потпуно	1026	8,97	1,03
делимично	947	8,32	1,11
не слажем се	379	7,82	1,33
без	99	8,14	1,31

Табела 5.

Потпуно исти закључак добија се анализом средње оцене коју студенти очекују у зависности од процењеног предзнања. Резултати су дати у Табели 6. Највећу оценоу (8,97) очекују студенти који су у потпуности задовољни својим предзнањем у току слушања курса, док студенти који су своје предзнање проценили као недовољно, очекују оценоу 7,82. Применом F-теста (F-вредност=132,64, p -вредност $<0,05$) одбачена је хипотеза да је средња вредност оценоу коју студент очекује једнака у све четири групе).

<i>предзнање</i>	<i>број студ.</i>	<i>сред. вред.</i>	<i>стан. одст.</i>
потпуно	1032	8,96	1,08
делимично	993	8,11	1,21
не слажем се	381	7,78	1,33
без	98	8,23	1,28

Табела 6.

Закључна разматрања

У раду је приказан и анализиран део истраживања везаних за квалитет универзитетске наставе у области математике и информатике. Главни акценат стављен је на начин на који се процењује предзнање за слушање наставе из појединих предмета, као предуслова за извођење квалитетне наставе на студијском програму. Добијени резултати указују на то да постоји значајан простор за подизање квалитета, што се може остварити чвршћим повезивањем средњошколског и високог образовања. Реформа високог образовања која претходи реформи средњошколског образовања, може довести до слабијих резултата у реформи високог образовања, што отвара питање оправданости оваког редоследа реформи. Са друге стране, уочљив је значајан утицај начина учења и оцењивања који студенти доносе из средњошколских клупа. Истраживање је показало да студенти очекују нереално високе оценоу.

Квалитет наставе предуслов је за стварање квалитетних стручњака у свим областима. Из тих разлога неопходно је систематично пратити све аспекте универзитетске наставе и кроз стручну анализу, доношењем одговарајућих превентивних и корективних мера, константно подизати њен квалитет. Овај рад, у том смислу, представља скроман допринос у анализи тренутног квалитета наставе на Департману за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду.

Литература

- Правилник о стандардима за самовредновање и оцењивање квалитета високошколских установа (Службени гласник РС, број 106/2006)
- Правилник о стандардима и поступку за спољашњу проверу квалитета високошколске установе (Службени гласник РС, број 106/2006)
- Правилник о самовредновању студија, педагошког рада наставника и услова рада, Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду
- Закон о високом образовању, Службени гласник РС, број 76/2005.
- Зорана Лужанин, Мирослав Весковић, Славка Гајин: *Стандарди за акредитацију и сложени факултети – пример Природно-математичког факултета у Новом Саду*, XIV Скуп Трендови развоја: „Ефикасност и квалитет Болоњских студија”, Копаоник, 03–06. 03. 2008, 38–41.

Zoran Lužanin, Ph. D., Novi Sad

A VIEW ON THE QUALITY OF UNIVERSITY TEACHING

Summary

The article deals with an aspect of the quality of university teaching mathematics, applied mathematics and computer science. Thus, in some extent it depends on the quality of secondary school teaching. The focus is on the previously retained knowledge as solid base for successful learning in tertiary education, and thus substantially influence teaching activity. The survey proved that there is sufficient space for raising the quality of prior knowledge, primarily at the first year of studies.

Д-р Зорана Лужанин, Новый Сад

ОДИН ВЗГЛЯД НА КАЧЕСТВО ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ В УНИВЕРСИТЕТЕ

Резюме

В настоящей работе автор рассматривает один из аспектов качества процесса обучения в университете в области обучения математике, применения математики и информатики, который в определённой мере зависит от качества обучения в средней школе. Основной рассмотренной характеристикой является предзнание студентов и их готовность слушать предметы и программу на факультете, от чего в большой мере зависит качество процесса обучения. Проведённое исследование подтвердило, что существует значительное место ещё улучшить качество предзнаний, прежде всего на первом курсе обучения на факультете.

Др Миодраг Милићевић

Висока технолошка школа струковних студија, Шабац

Мр Драгана Тодорић-Вукашин

Природно-математички факултет, Нови Сад

UDK 371.3:004

UDK 373.5:371.3]:004.4'27

UDK 373.3:371.3]:004.4'27

Стручни чланак

Примљен: 25. XII 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 955–961

ПРИМЕНА МУЛТИМЕДИЈАЛНИХ АЛАТА У ОБРАЗОВАЊУ

Резиме

У раду се указује на примену мултимедијалних алата у образовању. С обзиром да се у настави све више користе информационе технологије, традиционалне методе се замењују новим, савременим и уз коришћење мултимедијалних алата. У раду су приказани алати из пакета Adobe (Macromedia) који се могу применити у настави, као и истраживање о примени мултимедијалних алата у неким образовним установама.

Кључне речи: образовање, настава, мултимедијални алати, мултимедија

Увод

Чињеница да су информационо-комуникационе технологије постале саставни део система образовања и то као подршка наставнику у реализацији традиционалне наставе или као замена таквој настави с једном од бројних нових метода и начина реализације наставног процеса као и процеса учења и подучавања. На основу бројних истраживања која недвосмислено потврђују примену мултимедије у настави, направили смо неколико анкета како би се уверили у спремност наставника и ученика да прихвате мултимедију као важан део информационо-комуникационе технологије, у свакодневной настави. Истраживање је вршено у неколико образовних установа:

- Основна школа „Растко Немањић – Свети Сава“ у Новој Пазови,
- Техничка школа у Старој Пазови,
- Средња економска школа „Вук Караџић“ у Старој Пазови,
- Гимназија „Бранко Радичевић“ у Старој Пазови,
- Средња стручна школа „Бранко Радичевић“ у Руми.

У основној и средњим школама анкетирани су наставници и ученици. С обзиром да су резултати по школама слични, нисмо давали резултате појединачно, већ само збирни преглед за све школе.

Резултати анкетања

Анкетирано је 125 ученика из једне основне и четири средње школе, 65 наставника. Анкетом је обухваћено по једно одељење. Школе у којима је организовано анкетање су градског типа. Резултати анкета представљени су у графиконима (Слика 1. и 2. за ученике и Слика 3. за наставнике).

Да ли имате рачунар?

На претходно питање позитиван одговор је дало 113 ученика, а сопствени рачунар нема 12 ученика. У процентима то је 90,4 %, што је свакако охрабрујуће.

Колико времена проводите за рачунаром?

На ово питање дати су разни одговори: највише одговора је било 1 час, до 2 часа и до 3 часа. Међутим, било је одговора више од три часа, и то код ученика прве године у Средњој стручној школи „Б. Радичевић” у Руми и у Техничкој школи у Старој Пазови, где су анкетирани ученици треће године компјутерских техничара. Поред наведених било је других одговора у знатно мањем броју: пола сата, 10 минута, мало, 6 сати, не користим, итд.

Користите ли рачунар за учење градива, вежбање?

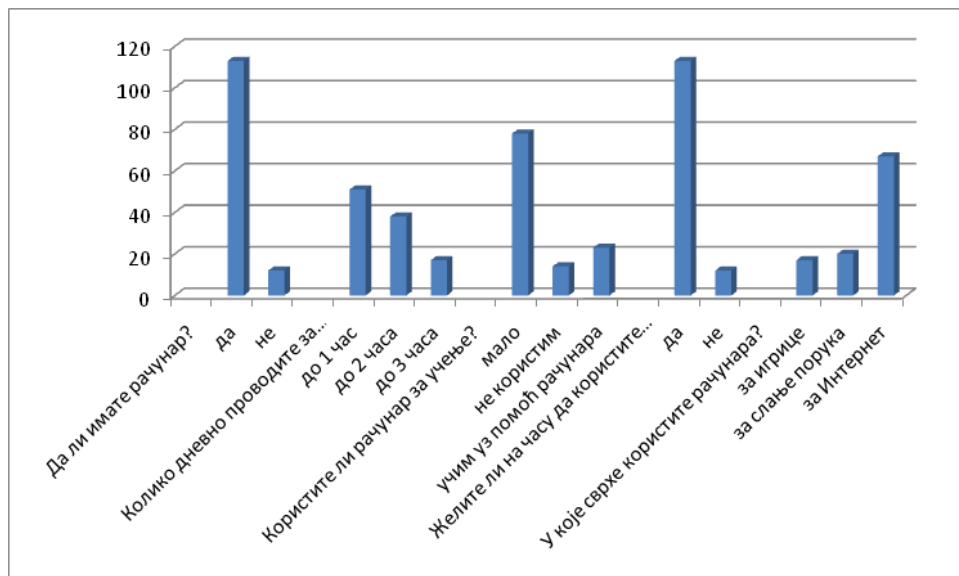
Највише одговора је било да мало користе рачунар за учење, затим нешто мање њих учи уз помоћ рачунара, било у малом проценту и ученика који не користе рачунар за учење углавном они који га немају. На ово питање било је и других одговора: понекад, само Интернет, углавном, зависи и слично.

Желите ли на часу да користите рачунар?

Од 125 ученика 118 је одговорило потврдно, 6 ученика се изјаснило да не жели да користи рачунар на часу, а један није одговорио на питање.

У које сврхе користите ваш кућни рачунар?

Ученици су могли да заокруже више одговора, као и да допишу свој одговор. Убедљиво највише одговора је било за Интернет, потом следе игрице, слање порука, учење. Наравно, и овде је било дописаних одговора: за све, за гледање филмова, музику, за вежбање, за све поменуто, за уређивање текста, слика итд.



Слика 1: Резултати анкете за првих пет питања

Да ли Вам се допао час на којем је коришћен рачунар?

Било је разних одговора. Највише ученика 101 је одговорило, *да*. Одговор *не* дало је 15 ученика. Остали ученици су навели разне коментаре: није лоше, само да је више, нисам био на часу, не сећам се, веома занимљиво, не знам и сл.

Да ли Вам је излагање уз помоћ рачунара занимљивије од класичног излагања?

Већина ученика је одговорила да је излагање занимљивије, интересантије. Њих 15 је одговорило да им нису занимљива оваква предавања. Било је и оваквих одговора: онако, можда, може бити, наравно увек, уз помоћ рачунара и видео пројектора је супер и слично.

За које сте програме чули?

Било је наведено 15 одговора и могућност да се упише одговор. Наведени су програми из пакета Macromedia (Adobe) Flash, Dreamweaver, Fireworks Adobe Photoshop, Premiere, Adobe in Design, Adobe Desinger, Microsoft PowerPoint, Autodesk 3DS и други. Већина програма су мултимедијални, тако да охрабрује чињеница да је огромна већина ученика (113) заокружила више одговора, док је 12 ученика навело да није чуло ни за један програм. Највише ученика је чуло за Microsoft PowerPoint, следе програми из пакета Macromedia, затим Adobe Photoshop CorelDraw итд.

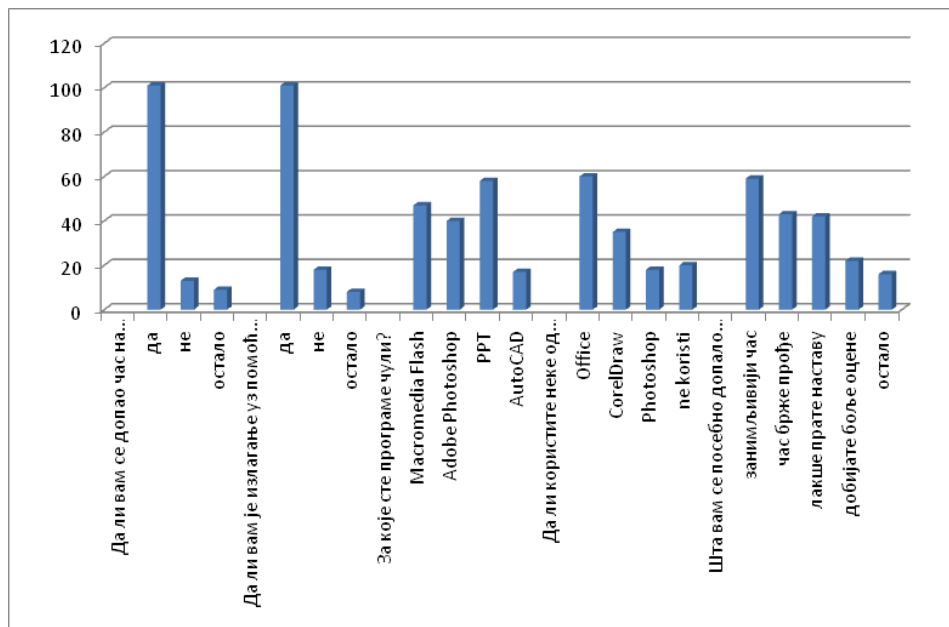
Да ли користите неке од програма, наведите које?

Већина ученика је навела да користе углавном програме из пакета Office и то Word, PowerPoint, Paint. Мањи број ученика користи Adobe Photoshop,

CorelDraw, пакет Macromedia. Један број ученика користи алате AutoCAD, ProEngineer, QuarkXPress. 22 ученика се изјаснило да не користе програме.

Шта Вам се посебно допада код програма које користите у настави?

Било је понуђено више одговора, као и могућност дописивања. Највише ученика је одговорило да им је занимљивији час, да час брже прође, лакше прате наставу. Следе одговори да је јасније излагање наставника, као и да добијају боље оцене. Најчешћи коментари су били: не морамо да пишемо, више забаве, научимо нешто новије и брже итд.

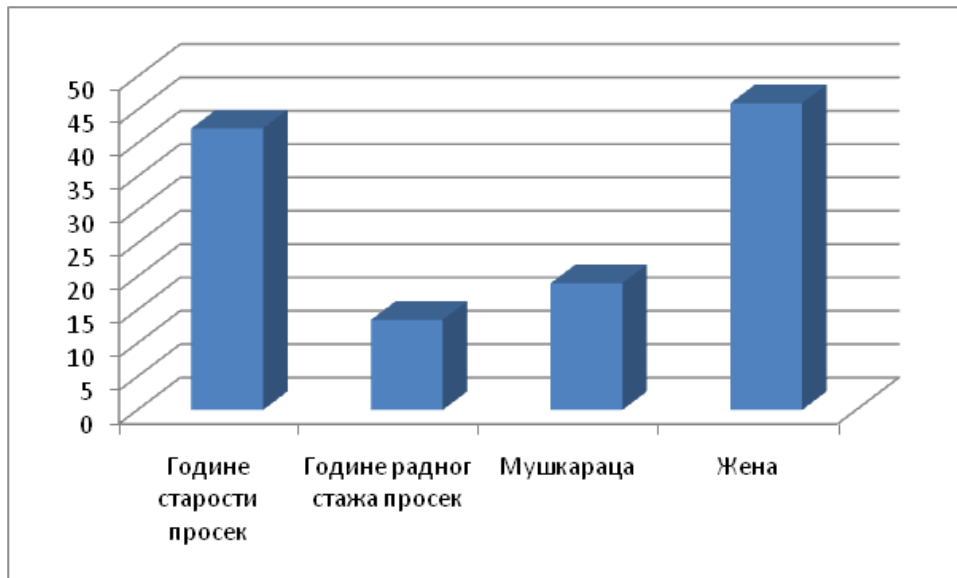


Слика 2: Резултати анкете за други део питања ученика

Анкетирани наставници

У анкети је било постављено 14 питања. Првих пет питања било је општег типа: године живота, године дипломирања, стаж у настави, пол, врста школе у којој ради. Остала питања била су у вези са коришћењем, применом рачунара као и одговарајућих програмских мултимедијалних алата у настави. Анкетирани су наставници који су се задесили у смени, тако да је одзив различит по школама. Али, и поред релативно малог броја наставника који су анкетирани може се стећи увид у примену рачунара, односно мултимедије у настави. Анкетирано је 65 наставника у наведеним школама.

Укупан просек година живота износи 42,22 године. Просечан стаж у настави је 13,51 година. Међу анкетираним је било 19 мушкараца и 46 жена.



Слика 3: Наставници

Што се тиче другог дела питања везаног за коришћење рачунара, највише одговора – 52 је било за Интернет, уношење и обраду текста, рад са табелама. Нешто мање наставника користи рачунар за презентације и математичке програме.

Већина наставника је похађала курсеве за коришћење рачунара – 24, затим у току редовног школовања – 30, а остали су научили самостално да користе рачунар.

На питање који су им програмски алати познати? Највише познају MS PowerPoint, Adobe (macroedia) Flash, Dreamweaver, Photoshop итд, које и користе по потреби. Што се тиче приступа школском рачунару, већина сматра да има довољан приступ, нешто мање да немају приступ, или имају недовољно. Већина наставника проводи по два сата дневно за рачунаром, било да је у питању припрема наставе или забава.

На основу сазнања до којих смо дошли о (не)примени мултимедије у основним и средњим школама урадили смо експеримент у основној школи „Растко Немањић – Свети Сава“ у Новој Пазови. Експеримент смо радили у основној школи тако што смо изабрали једну групу ученика у једној смени, где је колегица одржала час информатике уз коришћење пројектора, персоналног рачунара и мултимедијалног CD-а. Пре тога настава из тог предмета се одвијала тако што се деци држи предавање, објасне појмови на табли и по потреби на рачунару покажу практични задаци. После недељу дана извршена је провера знања у обе групе ученика, где се испоставило да су исто градиво, много боље савладали ученици који су имали мултимедијално предавање. Кроз разговоре са предметним

наставником и ученицима дошли смо до сазнања, да су деца боље мотивисана, много боље уче и добијају боље оцене.

Закључак

У раду је представљен један од начина модернизације и унапређења наставе. Разумевање наставног садржаја, код групе ученика који су користили мултимедијални CD, додатно се проверавало кроз интерактивне дискусије и конкретне задатке које су ученици требали да ураде. Циљ је био постићи да ученици што боље и што више науче од онога што је било предвиђено наставним програмом предмета. Потврђено је да мултимедијални приступ интерактивном учењу на вежбама има значајан утицај на квалитет наставног процеса.

Резултати ове анализе ће послужити као основа за даљи процес побољшања наставе увођењем савремених мултимедијалних и дидактичких елемената. Наставак унапређења наставног процеса из предмета требало би усмерити ка моделима који су прилагођени и максимално усклађени са стилом учења ученика и савременим облицима образовног процеса.

Мултимедијална технологија омогућава да учење постане лакше, очигледније и брже. Омогућава повећање броја оних који уче, већу разноврсност садржаја и информација које се уче, бољи квалитет наставних информација, промену функције и улоге и наставника и ученика, и бољи квалитет процеса учења и наставе. Она омогућава реализацију наставе пружајући јој могућности за емитовање, преношење, селекцију, кодирање, декодирање, пријем, меморисање и трансформацију свих врста наставних информација и на тај начин ствара нове и моћне изворе за учење помоћу којих ученици могу сазнавати свет науке, производње и савременог друштва.

Неминовност је прихватити нове изазове уз потпуну интеграцију и употребу свих расположивих ресурса и технологија, а све у циљу постизања што већих резултата у иновацији, индивидуализацији у процесу имплементације мултимедијалног софтвера.

Литература

- Тау Ваугхан, Мајстор за мултимедију, Компјутер библиотека Чачак, 2002.
 Добривоје Михаиловић, Методологија научноистраживачких пројеката, Центар за примењену психологију, Београд 1995.
 В. Сотировић, Методика информатике, Технички факултет „Михајло Пупин“ Зрењанин, 2000.

Miodrag Milićević, Ph. D., Šabac, Dragana Todorović-Vukašin, M. A., Novi Sad

APPLICATION OF MULTIMEDIA TOOLS IN EDUCATION

Summary

The article deals with the application of multimedia tools in education. Information technology is widely used in teaching activity, so traditional methods of teaching are substituted by new, contemporary ones along with application of multimedia tools. The article presents the tools of Adobe (Macromedia) Package which could be used in teaching activity as well as a survey on using multimedia tools in some educational institutions.

Key words: education, teaching activity, multimedia tools, multimedia

Д-р Миодраг Миличевич, Шабач, м-р Драгана Тодорич-Вукашин, Новый Сад

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИМЕДИАЛЬНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ В ОБРАЗОВАНИИ

Резюме

В настоящей работе автор указывает на применение мультимедиаальных инструментов в образовании. Имея в виду то, что в процессе обучения всё больше используются информационные технологии, традиционные методы идут на смену новым, современным, используя мультимедиаальные инструменты. В работе представлены инструменты из группы Adobe (Macromedia), которые можно применить в процессе обучения, как и исследование о применении мультимедиаальных инструментов в некоторых образовательных заведениях.

Опорные слова: образование, процесс обучения, мультимедиаальные инструменты, мультимедиа

Мр Бранко Прентовић

ВШССОВ, Кикинда

Проф. др Драгослав Херцег

Природно-математички факултет, Новом Сад

UDK 371.3::514.12]:004

UDK 371.64/.69:004

Прегледни чланак

Примљен: 25. XII 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 962–977

АНАЛИЗА ОПШТЕ КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРИМЕНОМ РАЧУНАРА

Резиме

У раду је приказана примена рачунара за анализу опште квадратне једначине са две променљиве. Рачунар са образовним софтвером GeoGebra омогућује директну примену изометријских трансформација, не на трансформације координатног система, него на геометријске фигуре (тачке, праве, криве), што има за последицу трансформације одговарајућих једначина у њима еквивалентне једначине.

Кључне речи: општа квадратна једначина, крива другог реда, елипса, хипербола, парабола, GeoGebra, визуализација

1. Увод

Анализа опште квадратне једначине са две променљиве проблем је који се обично решава у оквиру реализације градива аналитичке геометрије, тачније приликом обраде опште теорије кривих другог реда. Како ова анализа захтева веома обимна рачунања, за које је потребно и значајно време, обично, у досадашњој (традиционалној) наставној пракси, њој се не посвећује довољна пажња.

У новије време, увођењем рачунара и рачунарског образовног софтвера у наставни процес, стварају се услови за детаљно расветљавање овог проблема, уз значајну уштеду времена. Другим речима, настава уз помоћ рачунара, као нов наставни систем, ствара услове за успешну реализацију ових наставних садржаја. У овом наставном систему ученик преузима нову улогу – ученик је активни субјект у наставном процесу, који се реализује уз доследно поштовање општих дидактичких принципа, а посебно принципа индивидуализације наставе и принципа индивидуализације активности ученика. При томе, принцип очигледности у овом наставном систему, испуњава не само илустративну, него и когнитивну функцију наставе и учења, што је основа за визуализацију наставе.

У раду ће бити коришћене познате трансформације подударности: ротација и транслација. Рачунар пружа могућност да се ове трансформације примењују директно на геометријске фигуре (тачке, праве, криве, ...), а као резултат

добиају се одговарајуће еквивалентне једначине, а не на трансформације координатног система.

Ротацију $\rho_S^{\varphi}(A) = A_1$ око центра $S(p, q)$, за угао φ , којом се тачка $A(x, y)$ пресликава на тачку $A_1(x_1, y_1)$, приказујемо следећом формулом:

$$(1) \quad (x, y) \xrightarrow{\rho_S^{\varphi}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (x - p) \cos \varphi - (y - q) \sin \varphi + p \\ y_1 = (x - p) \sin \varphi + (y - q) \cos \varphi + q \end{cases},$$

а транслацију $\tau_{\vec{v}}(A) = A_1$, за вектор $\vec{v} = (a, b)$, којом се тачка $A(x, y)$ пресликава на

тачку $A_1(x_1, y_1)$, приказујемо формулом:

$$(2) \quad (x, y) \xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x + a \\ y_1 = y + b \end{cases}.$$

Треба нагласити да се приликом пресликавања кривих (геометријских места тачака) користи инверзна изометрија. Наиме, може се доказати да ако су $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1$, две подударне криве, а f нека од изометрија дата формулом (1), или (2), онда важи

$$f: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K},$$

тј. изометријом f , крива $\mathcal{K}_1$ пресликава се на криву $\mathcal{K}$, што значи: **крива $\mathcal{K}_1$ је оригинал, а крива $\mathcal{K}$ је њена слика, изометријом f .**

2. Центар криве

Једначина

$$(3) \quad \mathcal{K}: ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

где $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, зове се општа квадратна једначина са две променљиве и представља геометријску фигуру у равни, познату под именом – крива другог реда. У тексту који следи, анализирамо једначину (3) и криву $\mathcal{K}$, коју она представља. У ту сврху посматрамо и две детерминанте δ и Δ , формиране на следећи начин:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

Запишимо једначину (3) на следећи начин:

$$(ax + by + d)x + (bx + cy + e)y + dx + ey + f = 0.$$

Систем једначина

$$(4) \quad ax + by + d = 0 \quad \text{и} \quad bx + cy + e = 0.$$

је сагласан, ако и само ако за детерминанту система δ , важи

$$\delta = ac - b^2 \neq 0.$$

Ако је пар $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ његово решење (које је јединствено), тј. ако важи

$$ax_0 + by_0 + d = 0 \quad \text{и} \quad bx_0 + cy_0 + e = 0,$$

тада је

$$(5) \quad (x_0, y_0) = \left(\frac{be - cd}{ac - b^2}, \frac{bd - ae}{ac - b^2} \right).$$

Важи следећа важна теорема.

Теорема 1. Ако је $\delta \neq 0$, а пар $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ решење система (4), онда је тачка $S(x_0, y_0)$ центар симетрије криве $\mathcal{K}$.

Доказ. Треба доказати да под наведеним условима важи: ако је $T(x, y)$ произвољна тачка криве $\mathcal{K}$, онда је и $T_1(2x_0 - x, 2y_0 - y)$, њена централно-симетрична слика у односу на центар криве $S(x_0, y_0)$, такође тачка криве $\mathcal{K}$. У ту сврху, ако једначину (3) представимо на следећи начин:

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

онда важи

$$\begin{aligned} F(2x_0 - x, 2y_0 - y) &= \\ &= a(2x_0 - x)^2 + 2b(2x_0 - x)(2y_0 - y) + c(2y_0 - y)^2 + 2d(2x_0 - x) + 2e(2y_0 - y) + f \\ &= 4((ax_0 + by_0 + d)x_0 + (bx_0 + cy_0 + e)y_0 + dx_0 + ey_0 + f) - 4dx_0 - 4ey_0 - 4f - \\ &\quad - 4(ax_0 + by_0 + d)x - 4(bx_0 + cy_0 + e)y = 0 \end{aligned}$$

што доказује тврђење. ■

Значи, за $\delta \neq 0$, постоји јединствени центар симетрије $S(x_0, y_0)$ криве $\mathcal{K}$, дате једначином (3), због чега такву криву називамо **централна крива**.

Ако је $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \neq \frac{d}{e}$, систем једначина (4) нема решења ($ax + by + d = 0$ и $bx + cy + e = 0$ су различите паралелне праве), а крива $\mathcal{K}$ нема центар симетрије.

Ако је $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$, праве $ax + by + d = 0$ и $bx + cy + e = 0$, се поклапају, систем једначина (4) има бесконачно много решења, због чега крива (тачније, скуп тачака) $\mathcal{K}$ нема јединствени центар симетрије.

На основу наведеног важи следећа теорема.

Теорема 2. Једначина (3) представља: централну криву другог реда, ако и само ако је $\delta \neq 0$, криву без центра ако и само ако је $\delta = 0$. ■

Може се доказати једна значајна теорема, о односу централне криве и њеног центра.

Теорема 3. Нека је (3) једначина централне криве другог реда ($\delta \neq 0$). Центар не припада тој кривој, ако је

$$\Delta \neq 0.$$

Тада кажемо да је крива **недегенерисана**, у противном је **дегенерисана**.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека центар $S(x_0, y_0)$ централне криве другог реда (3), припада тој кривој, што је еквивалентно са формулом

$$ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f = 0$$

или

$$(ax_0 + by_0 + d)x_0 + (bx_0 + cy_0 + e)y_0 + dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

С друге стране, тачка $S(x_0, y_0)$ је центар криве (3), ако је $\delta \neq 0$, тј. ако постоји пар $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, који је решење система (4), тј. када важи

$$ax_0 + by_0 + d = 0 \quad \wedge \quad bx_0 + cy_0 + e = 0.$$

После множења последњих једначина са x_0 и y_0 , редом, и сабирања, важи

$$\text{због чега је} \quad (ax_0 + by_0 + d)x_0 + (bx_0 + cy_0 + e)y_0 = 0,$$

$$\text{Дакле, систем} \quad dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

(6) $ax + by + d = 0 \wedge bx + cy + e = 0 \wedge dx + ey + f = 0$
има јединствено решење (x_0, y_0) , тј. праве (6) секу се у тачки $S(x_0, y_0)$, а то важи ако је $\Delta = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком. ■

Ако за коефицијенте једначине (3) важи $\Delta \neq 0$, тада кажемо да је крива коју она представља **недегенерисана**, у противном крива је **дегенерисана**.

Ако је крива (3) централна, израчунава се детерминанта Δ , и у зависности од тога да ли је $\Delta = 0$, или $\Delta \neq 0$, утврђује се да ли центар припада кривој, или не припада.

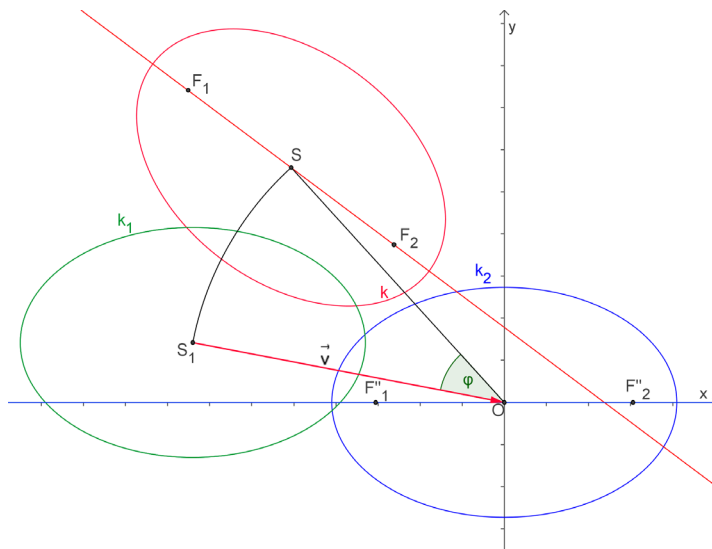
Сада анализирамо општу квадратну једначину (3) у којој је $b \neq 0$ и оба случаја: $\delta \neq 0$ и $\delta = 0$.

3. Централне криве ($\delta \neq 0$)

За почетак, нека је дата једначина

$$14.5x^2 + 12xy + 18y^2 + 16x - 28y + 17 = 0.$$

Пошто је $\delta = 225 \neq 0$, дата једначина представља централну криву $\mathcal{K}$.



Слика 1.

Сада је потребно извршити такву трансформацију, којом ће се ова крива пресликати на криву $\mathcal{K}_1$, у чијој ће једначини коефицијент уз xy , бити једнак

0. То је ротација ρ_O^φ око координатног почетка, за угао φ , дат са (10), о којој ће бити више речи касније (Слика 1). Ротација ρ_O^φ пресликава криву $\mathcal{K}$, на криву

$$\mathcal{K}_1: 10x^2 + 22.5y^2 + 29.6x - 12.8y + 17 = 0,$$

Координате центра S_1 , $x_1 = -74/50$ и $y_1 = 64/225$, израчунавамо решавајући систем (4), који у овом случају гласи

$$10x + 14.8 = 0 \quad \text{и} \quad 22.5y - 6.4 = 0.$$

Транслација $\tau_{\vec{v}}$, за вектор $\vec{v} = (-x_1, -y_1)$, дата са (12), пресликава криву $\mathcal{K}_1$, на криву

$$\mathcal{K}_2: 10x^2 + 22.5y^2 = 1513/225,$$

што је очигледно елипса.

Да би се дошло до закључка да је крива $\mathcal{K}$ елипса, а такође и њене слике $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, свакако да није потребно изводити све ове трансформације.

Међутим, ако треба да се одреде још неке карактеристике те криве $\mathcal{K}$, као на пример: жиже, темена, асимптоте, директрисе и сл, тада треба користити наведене трансформације, што приказујемо у тексту који следи.

а) Нека је, дакле, дата једначина (3), таква да је $\delta \neq 0$, тј. једначина (3) представља криву са центром и нека је то тачка $S(x_0, y_0)$.

На криву $\mathcal{K}$, применимо ротацију ρ_O^φ око координатног почетка O за неки угао φ , са циљем да је пресликамо на подударну криву, у чијој ће једначини коефицијент уз xy , бити једнак нули. Наведена ротација дата је са

$$(7) \quad (x, y) \xrightarrow{\rho_O^\varphi} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}.$$

Слика криве $\mathcal{K}$ је крива $\mathcal{K}_1$, дата једначином:

$$(8) \quad \mathcal{K}_1: Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0$$

где је

$$A = a \cos^2 \varphi - 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi,$$

$$2B = 2b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2a \sin \varphi \cos \varphi - 2c \sin \varphi \cos \varphi$$

$$C = a \sin^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi,$$

$$D = d \cos \varphi - e \sin \varphi,$$

$$E = d \sin \varphi + e \cos \varphi.$$

Угао ротације φ одређујемо тако да буде испуњен услов $2B = 0$, тј.

$$2b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2a \sin \varphi \cos \varphi - 2c \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

одакле је

$$(c - a) \sin 2\varphi = 2b \cos 2\varphi.$$

Овде је $\sin 2\varphi \neq 0$, јер ако је $\sin 2\varphi = 0$, онда је $\cos 2\varphi = \pm 1 \neq 0$, одакле следи $b = 0$, што је немогуће, јер је по услову $b \neq 0$. Дакле, после скраћивања са $2b \sin 2\varphi$, имамо

$$(9) \quad \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{c-a}{2b}.$$

Пошто је $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$, последња једначина има решење, а то је угао φ , такав да

је $2\varphi \in (0, \pi)$, одакле коначно имамо

$$(10) \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \frac{c-a}{2b}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Значи, ротацијом око координатног почетка за оштар угао φ дат са (10), крива $\mathcal{K}$ пресликава се на криву $\mathcal{K}_1$, облика

$$(11) \quad \mathcal{K}_1: Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0.$$

Транслагојом $\tau_{\vec{v}}$

$$(12) \quad (x, y) \xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - x_{01} \\ y_1 = y - y_{01} \end{cases}$$

за вектор $\vec{v} = (-x_{01}, -y_{01})$, крива $\mathcal{K}_1$ пресликава се на криву $\mathcal{K}_2$, одређену једначином

$$A(x + x_{01})^2 + C(y + y_{01})^2 + 2D(x + x_{01}) + 2E(y + y_{01}) + f = 0.$$

Ако се последња једначина прикаже у облику

$$Ax^2 + Cy^2 + 2(Ax_{01} + D)x + 2(Cy_{01} + E)y + (Ax_{01} + D)x_{01} + (Cy_{01} + E)y_{01} + Dx_{01} + Ey_{01} + f = 0,$$

а тачка $S_1(x_{01}, y_{01})$ се изабере тако да важи

$$(13) \quad Ax_{01} + D = 0 \quad \text{и} \quad Cy_{01} + E = 0,$$

тј.

$$x_{01} = -\frac{D}{A} \quad \text{и} \quad y_{01} = -\frac{E}{C},$$

онда је она тачка S_1 центар симетрије криве $\mathcal{K}_1$. У том случају једначина криве $\mathcal{K}_2$ има облик

$$\mathcal{K}_2: Ax^2 + Cy^2 + f_1 = 0,$$

где је

$$f_1 = Dx_{01} + Ey_{01} + f = -\frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} + f = \frac{ACf - CD^2 - AE^2}{AC},$$

тачка $S_1(x_{01}, y_{01})$ пресликава се на координатни почетак $O(0, 0)$. Специјално, за $d = e = 0$, једначина (11) се своди на (15).

На основу услова $B = 0$ и познатих тригонометријских идентитета важе следеће релације:

$$A + C = a + c,$$

$$(14) \quad AC - B^2 = AC = ac - b^2 = \delta,$$

$$ACf - CD^2 - AE^2 = acf - ae^2 - b^2f + 2bde - cd^2 = \Delta,$$

због чега се једначина (11) своди на облик:

$$(15) \quad \mathcal{K}_2: Ax^2 + Cy^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Сада следи дискусија последње једначине. $\S$ ту сврху, због услова $\delta \neq 0$, разликоваћемо два основна случаја: $\delta > 0$ и $\delta < 0$.

Ако је $\delta > 0$, онда једначина (15) представља:

- елипсу (реалну), ако је $AC > 0 \wedge A \cdot \Delta < 0$,
- празан скуп (имагинарну елипсу), ако је $AC > 0 \wedge A \cdot \Delta > 0$,
- тачку, ако је $AC > 0 \wedge \Delta = 0$.

Ако је $\delta < 0$, онда једначина (15) представља:

- хиперболу ($y = y_0$ реална оса), ако је $AC < 0 \wedge A \cdot \Delta < 0$,
- хиперболу ($x = x_0$ реална оса), ако је $AC < 0 \wedge A \cdot \Delta > 0$,
- две праве које се секу, ако је $AC < 0 \wedge \Delta = 0$.

Такође, на основу прве од релација (14), под условом $\delta > 0$ важи следећа релација

$$A > 0 \Leftrightarrow a + c > 0.$$

Користећи наведене релације (14), дискусија једначине (15) „преводи“ се на дискусију једначине (3), тј. може се закључити да крива $\mathcal{K}$, дата једначином (3) представља:

- елипсу (реалну), ако је $\delta > 0 \wedge (a + c) \cdot \Delta < 0$,
- празан скуп (имагинарну елипсу), ако је $\delta > 0 \wedge (a + c) \cdot \Delta > 0$,
- тачку, ако је $\delta > 0 \wedge \Delta = 0$,
- хиперболу, ако је $\delta < 0 \wedge \Delta \neq 0$,
- две праве које се секу, ако је $\delta < 0 \wedge \Delta = 0$.

Ако је $\delta > 0$ онда једначина (3) представља криву **елиптичког типа**, а ако је $\delta < 0$, једначина (3) представља криву **хиперболичког типа**.

Значи, ако је задата једначина било које централне криве, дегенерисане или недегенерисане, елиптичког или хиперболичког типа, израчунавањем детерминаната δ и Δ , једноставно се утврђује, који скуп тачака она представља.

Међутим, ако треба да се одреде још неке карактеристике те криве, као на пример: жиже, темена, асимптоте, директрисе, параметар и сл, нису довољне вредности ових двеју детерминаната. Тада треба користити описани алгоритам, који приказујемо и у примерима који следе.

Пример 1. Коју криву другог реда представља једначина:

- 1) $29x^2 + 144xy + 71y^2 - 40x + 30y - 50 = 0$;
- 2) $4x^2 + 4xy + 4y^2 + 11\sqrt{2}x + 7\sqrt{2}y - 4 = 0$?
- 3) $6x^2 + 13xy + 3y^2 - 3x + 13y - 30 = 0$

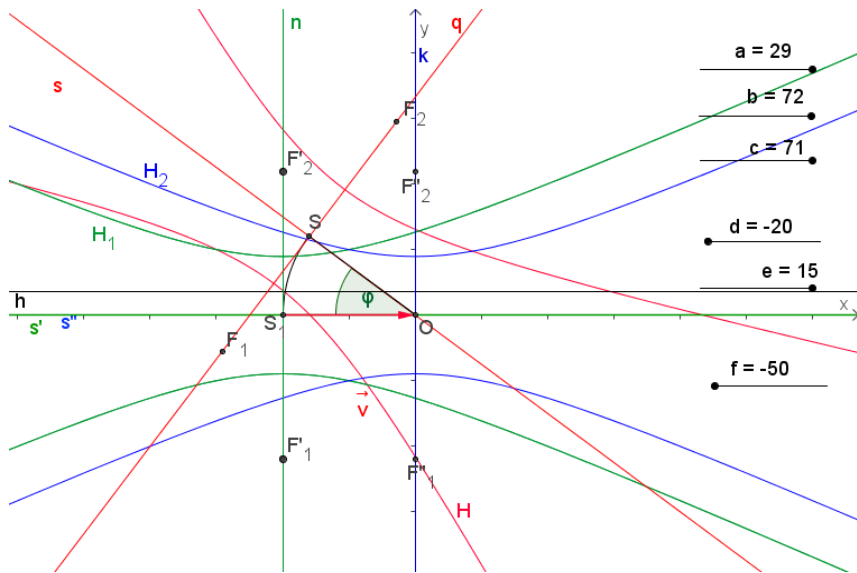
Одреди (ако постоје): полуосе, жиже, асимптоте, директрисе и параметар.

Решење. 1) Пошто је $\delta = -3125 < 0$, (значи и $\delta \neq 0$), дата једначина представља централну криву хиперболичког типа, а због $\Delta = 78125 \neq 0$, јасно је да се ради о хиперболи $\mathcal{H}$. Координате центра S , $x_0 = -0.8$ и $y_0 = 0.6$, израчунавамо решавајући систем (4), који у овом случају гласи:

$$29x + 72y - 20 = 0 \text{ и } 72x + 35.5y + 15 = 0.$$

Ротација ρ_ϕ^0 дата са (7), за угао ϕ , одређен са (10), пресликава хиперболу $\mathcal{H}$, на хиперболу (Слика 2)

$$\mathcal{H}_1: -x^2 + 5y^2 - 2x - 2 = 0,$$



Слика 2.

а центар S хиперболе $\mathcal{J}$, на центар $S_1(x_{01}, y_{01}) = S_1(-1, 0)$ хиперболе $\mathcal{H}_1$. Транслација $\tau_{\vec{v}}$, за вектор $\vec{v} = (-x_{10}, -y_{10})$, дата са (12), пресликава хиперболу $\mathcal{H}_1$, на хиперболу

$$\mathcal{H}_2: -x^2 + 5y^2 = 1.$$

Прво се одређују тражене карактеристике хиперболе $\mathcal{H}_2$:

- полуосе и темена $a = 1$, $b = \sqrt{5}/5$, $A_2(0, \sqrt{5}/5)$, $B_2(0, -\sqrt{5}/5)$;
- жиже $F_1''(0, c_2)$, $F_2''(0, -c_2)$, где је $c_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6/5}$;
- нумерички ексцентрицитет $e = \sqrt{6}$;
- асимптоте $\sqrt{5}x - 5y = 0$, $\sqrt{5}x + 5y = 0$;
- директрисе $y = \sqrt{30}/30$, $y = -\sqrt{30}/30$;
- параметар $p = a^2/b = \sqrt{5}$.

У следећем кораку композиција $\rho_O^{-\varphi} \circ \tau_{-\vec{v}}$, транслације за вектор $-\vec{v}$ и ротације $\rho_O^{-\varphi}$ око координатног почетка O за угао $-\varphi$, пресликава хиперболу $\mathcal{H}_2$, на хиперболу $\mathcal{J}$, а такође и жиже, темена, асимптоте, директрисе и реалну осу (y -осу) хиперболе $\mathcal{H}_2$, на жиже, темена, асимптоте, директрисе и реалну осу хиперболе $\mathcal{H}$. На тај начин имамо:

- темена $A\left(\frac{-20+3\sqrt{5}}{25}, \frac{15+4\sqrt{5}}{25}\right)$, $B\left(\frac{-20-3\sqrt{5}}{25}, \frac{15-4\sqrt{5}}{25}\right)$;
- жиже $F_1\left(\frac{-4+3\sqrt{6/5}}{5}, \frac{3+4\sqrt{6/5}}{5}\right)$, $F_2\left(\frac{-4-3\sqrt{6/5}}{5}, \frac{3-4\sqrt{6/5}}{5}\right)$;
- асимптоте $(3\sqrt{5}-4)x + (4\sqrt{5}+3)y = 3\sqrt{5}+4$, $(3\sqrt{5}+4)x + (4\sqrt{5}-3)y = 3\sqrt{5}-4$;
- директрисе $18x + 24y = 18 + \sqrt{30}$, $18x + 24y = 18 - \sqrt{30}$.

Јасно је да полуосе, ексцентрицитет (линеарни и нумерички) и параметар, остају инваријантни.

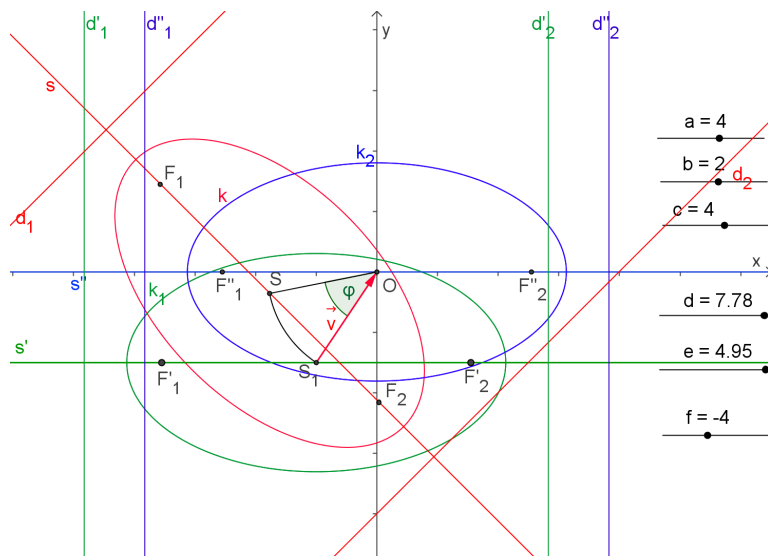
2) У овом случају је $\delta = 12 > 0$, $\Delta = -243 \neq 0$ и $(a+c)\Delta = -1944 < 0$ јасно је да се ради о елипсу $\mathcal{E}$. Решавајући систем

$$4x + 2y + 11\sqrt{2}/2 = 0 \text{ и } 2x + 4y + 7\sqrt{2}/2 = 0,$$

налазимо центар елипсе $S(-5\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/4)$. Ротација ρ_O^φ , где је угао $\varphi = \pi/4$, пресликава елипсу $\mathcal{E}$, (Слика 3), на елипсу

$$\mathcal{E}_1: x^2 + 3y^2 + 2x + 9y - 2 = 0,$$

а центар S елипсе $\mathcal{E}$, на центар $S_1(-1, -3/2)$ елипсе $\mathcal{E}_1$.



Слика 3.

Транслација $\tau_{\vec{v}}$, за вектор $\vec{v} = (1, 3/2)$, дата са (12), пресликава елипсу $\mathcal{E}_1$, на елипсу

$$\mathcal{E}_2: x^2 + 3y^2 = 39/4.$$

Сада за елипсу $\mathcal{E}_2$ имамо:

- полуосе $a = \sqrt{39}/2$, $b = \sqrt{13}/2$;

- темена $A_2(a, 0)$, $B_2(-a, 0)$, $C_2(0, b)$, $D_2(0, -b)$;
- жиже $F_1''(0, c_2)$, $F_2''(0, -c_2)$, где је $c_2 = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{26}/2$;
- нумерички ексцентрицитет $e = \sqrt{2/3}$;
- директрисе $x = 3\sqrt{26}/4$, $x = -3\sqrt{26}/4$;
- параметар $p = b^2/a = \sqrt{13}/12$.

Композиција $\rho_0^{-\varphi} \circ \tau_{-\vec{v}}$, транслације за вектор $-\vec{v}$ и ротације $\rho_0^{-\varphi}$ пресликава елипсу $\mathcal{E}_2$, на елипсу $\mathcal{E}$, а такође и жиже, темена, асимптоте, директрисе и осе елипсе $\mathcal{E}_2$, на жиже, темена, асимптоте, директрисе и осе елипсе $\mathcal{E}$. Тако добијамо:

- темена $A(\sqrt{21}/6, (-9\sqrt{2} + \sqrt{21})/6)$, $B(-\sqrt{21}/6, -(9\sqrt{2} + \sqrt{21})/6)$,
 $C((-5\sqrt{2} + \sqrt{26})/4, (-\sqrt{2} + \sqrt{26})/4)$, $D((-5\sqrt{2} - \sqrt{26})/4, (-\sqrt{2} - \sqrt{26})/4)$;
- жиже $F_1((-5\sqrt{2} + 2\sqrt{13})/4, (-\sqrt{2} - 2\sqrt{13})/4)$, $F_2((-5\sqrt{2} - 2\sqrt{13})/4, (-\sqrt{2} + 2\sqrt{13})/4)$;
- директрисе $2x - 2y + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{13} = 0$, $2x - 2y + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{13} = 0$,

с тим што полуосе, ексцентрицитет (линеарни и нумерички) и параметар, остају инваријантни.

Специјално (Пример 1.2), ако је $a = c$, угао ротације је $\varphi = \pi/4$, због чега је у једначини (15) $A = a - b$ и $C = a + b$. Како је $\delta \neq 0$, то је $a \neq \pm b$, одакле је $A \neq 0$ и $C \neq 0$.

4. Криве без центра ($\delta = 0$)

б) Анализирамо сада случај $\delta = 0$, тј. крива (3) нема центар. Тада важи

$$\delta = 0 \Leftrightarrow ac = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \text{праве (4) су паралелне.}$$

Опет се прво врши ротација ρ_0^{φ} дата са (7), за угао φ , одређен са (10), којом се крива $\mathcal{K}$ пресликава на подударну криву

$$(16) \quad \mathcal{K}': Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0,$$

где је

$$B = 0,$$

$$A = a \cos^2 \varphi - 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi,$$

$$C = a \sin^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi,$$

$$D = d \cos \varphi - e \sin \varphi,$$

$$E = d \sin \varphi + e \cos \varphi.$$

Пошто и у овом случају важе релације (14), онда из $\delta = 0$ и $B = 0$ следи $AC = 0$. Ако би важила једнакост $A = C = 0$, онда би било $b = 0$, што је супротно услову. Зато важи:

или $C = 0$, или $A = 0$, тј. важи једна од следећих релација:

$$\text{или } C = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \varphi = \frac{-a}{b}, \text{ или } A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \varphi = \frac{c}{b}.$$

Нека је $a > 0$ и $\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{a}{b}$. Тада једначина (16) постаје:

$$(17) \quad \mathcal{K}_1': Ax^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0,$$

где је $A = a + c$, $D = \frac{-(ad + be)}{\sqrt{b^2 + a^2}}$, $E = \frac{bd - ae}{\sqrt{b^2 + a^2}}$, и представља параболу чија оса је паралелна са y -осом, ако је $E \neq 0$, тј. ако је $bd - ae \neq 0$, што заједно са основним условом $\delta = 0$, значи

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \neq \frac{d}{e},$$

тј. праве (6) нису конкурентне (прве две од њих су различите паралелне праве), а тај услов је испуњен ако је $\Delta \neq 0$.

Аналогно, ако је $a > 0$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{c}{b}$, једначина (16) добија облик

$$(18) \quad \mathcal{K}_2': Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0,$$

где је $C = a + c$, $D = \frac{cd - be}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, $E = \frac{bd + ce}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, и представља параболу, са осом паралелном x -оси, ако је $D \neq 0$ тј. ако је испуњен услов $\Delta \neq 0$.

Сада се врши трансформација $\tau_{\vec{v}}$ криве (17), односно (18),

$$(x, y) \xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - x_0 \\ y_1 = y - y_0 \end{cases}$$

за вектор $\vec{v} = (-x_0, -y_0)$, којом се крива (17), односно (18), пресликава на

$$\mathcal{K}_1'': Ax^2 + 2(Ax_0 + D)x + 2Ey + Ax_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0,$$

односно

$$\mathcal{K}_2'': Cy^2 + 2Dx + 2(Cy_0 + E)y + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + f = 0.$$

Координате вектора $\vec{v}$ одређују се тако да важи

$$Ax_0 + D = 0 \text{ и } Ax_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + f = 0 ,$$

$$\text{одакле је } x_0 = -\frac{D}{A} \text{ и } y_0 = \frac{D^2 - Af}{2AE}, \text{ односно}$$

$$Cy_0 + E = 0 \text{ и } Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + f = 0 ,$$

$$\text{одакле је } x_0 = \frac{E^2 - Cf}{2CD} \text{ и } y_0 = -\frac{E}{C} . \text{ С обзиром на то да је тада}$$

$$\mathcal{K}_1'' : Ax^2 + 2Ey = 0 ,$$

односно

$$\mathcal{K}_2'' : Cy^2 + 2Dx = 0 ,$$

јасно је да тачка $T(x_0, y_0)$ представља теме параболе (17), односно (18).
Сада претпоставимо да је у једначини (17) $E = 0$, тј. $bd - ae = 0$, а како је $\delta = 0$,
то је и $\Delta = 0$, због чега једначина (17) постаје

$$\left(Ax + D - \sqrt{D^2 - Af} \right) \left(Ax + D + \sqrt{D^2 - Af} \right) = 0 ,$$

а пошто је $D^2 - Af = d^2 + e^2 - (a + c)f$, она представља:

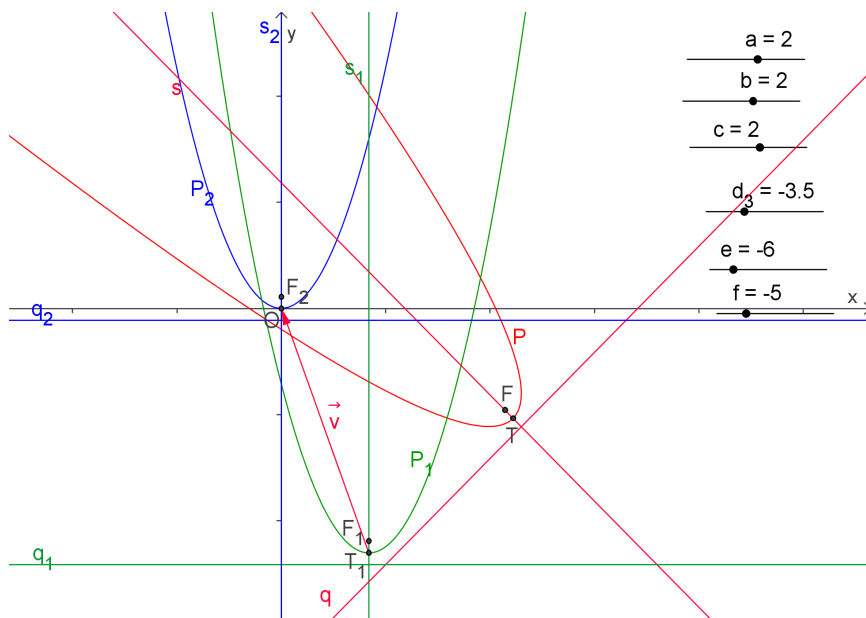
- две паралелне праве, ако је $d^2 + e^2 > (a + c)f$,
- једну праву, ако је $d^2 + e^2 = (a + c)f$,
- празан скуп (две имагинарне паралелне праве), ако је $d^2 + e^2 < (a + c)f$.

Аналогно, ако је $D = 0 \Leftrightarrow cd - be = 0$, уз услов $\delta = 0$, важи $\Delta = 0$, онда једначина (18) постаје

$$\left(Cy + E - \sqrt{E^2 - Cf} \right) \left(Cy + E + \sqrt{E^2 - Cf} \right) = 0 ,$$

и при аналогним условима $(E^2 - Cf = d^2 + e^2 - (a + c)f)$ представља: две паралелне праве, једну праву, или празан скуп.

И у овом случају ($\delta = 0$), ако је у једначини (3) $a < 0$, онда се после множења са -1 , дискусија своди на напред изведену.



Слика 4.

Пример 2. Анализирати једначину $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x - 12y - 5 = 0$.

Решење. Како је $\delta = 0$ а $\Delta = -12.5 \neq 0$, то значи да дата једначина преставља параболу $\mathcal{P}$. Ротација ρ_O^φ , где је угао $\varphi = \arctg(-b/a) = -\pi/4$, пресликава параболу $\mathcal{P}$ (Слика 4), на параболу

$$\mathcal{P}_1: 4\sqrt{2}x^2 - 19x - 5y - 5\sqrt{2} = 0,$$

чије теме је $T_1(19\sqrt{2}/16, -52.1\sqrt{2}/16)$. Транслација $\tau_{\vec{v}}$, дата са (12), за вектор $\vec{v} = (-19\sqrt{2}/16, 52.1\sqrt{2}/16)$, пресликава параболу $\mathcal{P}_1$, на параболу

$$\mathcal{P}_2: 4\sqrt{2}x^2 - 5y = 0,$$

за коју је: оса симетрије y – оса, теме $O(0,0)$, параметар $p = 5\sqrt{2}/16$, жижа $F(0, 5\sqrt{2}/32)$, а директриса $y = -5\sqrt{2}/32$. Композиција $\rho_O^{-\varphi} \circ \tau_{-\vec{v}}$, трансације за вектор $-\vec{v}$ и ротације $\rho_O^{-\varphi}$ пресликава параболу $\mathcal{P}_2$, на параболу $\mathcal{P}$, а такође и осу, теме, жижу и директрису параболу $\mathcal{P}_2$, пресликава на одговарајуће елементе параболу $\mathcal{P}$, за коју је: оса симетрије $8x + 8y = 19$, теме $T(71.1/16; -33.1/16)$, директриса $8x - 8y = 54.6$, жижа $F(68.6/16; -30.6/16)$, а параметар је $p = 5\sqrt{2}/16$.

Напомена. Ако је $b = 0$, тада једначина (3), има облик

$$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

и у зависности од детерминанте δ , поступа се исто као са једначином (11), ако је $\delta \neq 0$, или као са једначином (16), ако је $\delta = 0$.

Задатак. За вежбу, читалац може применом наведених поступака, да анализира следеће једначине: 1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 9x - 18 = 0$, 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y - 18 = 0$.

5. Закључак

Резултат претходног излагања, приказан је у следећој табели:

$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$(a+c) \cdot \Delta < 0$	елипса
		$(a+c) \cdot \Delta > 0$	празан скуп (имагинарна елипса)
	$\Delta = 0$	тачка	
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	хипербола	
	$\Delta = 0$	две праве које се секу	
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	парабола	
	$\Delta = 0$	$d^2 + e^2 > (a+c)f$	две различите паралелне праве
		$d^2 + e^2 = (a+c)f$	једна права (две идентичне праве)
		$d^2 + e^2 < (a+c)f$	празан скуп (две имагинарне паралелне праве)

Приказани поступак, илуструје примену рачунара и образовног софтвера GeoGebra, на анализу опште квадратне једначине, тј. на општу теорију кривих другог реда, при чему се добија исти резултат као и када се исти проблем решава на традиционалан начин.

Веома је важно напоменути, да се за решење сваког од ових примера формира генерички организатор који представља окружење за решавање једног сета сродних проблема. Другим речима, сваки од наведених генеричких организатора представља алгоритам по коме се изводи цео поступак за анализу једног од девет типова кривих другог реда.

Овако примењен рачунар и образовни софтвер GeoGebra обезбеђују визуализацију наставе математике, тј. обезбеђује широко и сврсисходно коришћење когнитивне функције очигледности.

Генерички организатори, као средство когнитивно-визуалног приступа настави математике, представљају визуално окружење за наставу математике, у коме се акценат ставља на коришћење ресурса визуалног мишљења ученика.

Литература

- Беклемишев, Д. В.: Курс аналитической геометрии и лентной алгебры. - 10-е изд., ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- Делоне, Б. Н., Райков, Д. А.: Аналитическая геометрия. ОГИЗ, Москва, 1948.
- Ефимов, Н. В.: Краткий курс аналитической геометрии. Учебн. пособие. - 13-е изд., ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- Заславский, А. А.: Геометрические преобразования, МЦНМО, Москва, 2004.

- Зими́на, О. В.: От компьютерной поддержки к новому объекту обучения. „Математика. Компьютер. Образование“. Сборник научных трудов. Москва–Ижевск: R&C Dynamics, 2003. С. 65—76. <http://www.mce.su/rus/>
- Presmeg, N. C.: Visualisation and mathematical giftedness <http://www.springerlink.com/content/r13w63997755h611/>
- Tall, D.: 1993. Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A Tribute to Richard Skemp www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall
- Tall, D., Sheath, G.: Visualizing higher level mathematical concepts using computer graphics, Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Israel, 357-362, 1983. www.geogebra.at

Branko Prentović, M. A., Kikinda; Prof. Dragoslav Herceg, Ph. D., Novi Sad

ANALYSIS OF GENERAL QUADRATIC EQUATION

Summary

The article presents software application for analyzing general quadratic equation with two variables. GeoGebra educational software enables direct application of isometric transformations; not on transformations of coordinate system, but on geometric figures (dots, lines, curves) which results in transformation of corresponding equations into equivalent ones.

Key words: general quadratic equation, curve of second order, ellipse, hyperbola, parabolic curve, GeoGebra, visualisation

М-р Бранко Прентович, Кикинда, д-р Драгослав Герцег, Новый Сад

АНАЛИЗ ОБЩЕГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА

Резюме

В настоящей работе показано применение компьютера в анализе общего квадратного уравнения с двумя переменными. Компьютер с образовательной программой GeoGebra даёт возможность прямого применения изометрических трансформаций, не на трансформации координатной системы, а не геометриче-

ские фигуры (точки, прямые линии, кривые) последствием чего являются трансформации соответствующих уравнений в их эквивалентные уравнения.

Опорные слова: общее квадратное уравнение, кривая второго порядка, эллипс, гипербола, парабола, GeoGebra, визуализация

Светлана Малетин

Гимназија „Јован Јовановић Змај“, Нови Сад

Милош Рацковић

Природно-математички факултет, Новом Сад

UDK 371.3:004

UDK 373.3:371.3]:004

UDK 373.5:371.3]:004

Прегледни чланак

Примљен: 25. XII 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 978–990

РАЧУНАРСКЕ НАУКЕ У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ У СВЕТУ И КОД НАС

Резиме

Најновије тенденције у настави информатике (The New Educational Imperative, CSTA, 2005) дефинишу три основне наставне целине: Образовна технологија – коришћење рачунара у настави, Информационе технологије – коришћење хардвера и софтвера ради управљања информацијама, и Рачунарске науке – дизајнирање и имплементација софтвера, развијање ефективних начина за решавање рачунарских проблема, проналажење нових путева за употребу рачунара.

Развој хардвера и софтвера у данашње време условио је велики број корисничких алата те се учење информатике у основним и средњим школама углавном бави савладавањем истих, односно такозваном рачунарском писменошћу. Учење самих рачунарских наука, пре свега учење програмирања, програмских језика, програмске парадигме и надасве логике заступљено је веома мало и углавном веома разнолико. Рад се бави анализом колико и како су заступљене у образовању у основним и средњим школама рачунарске науке код нас и у свету. Материјал је прикупљен из стратегија образовања у САД, Русији, Литванији и још неколико земаља.

Кључне речи: техника, информатика, образовање

Увод

Информатика као рачунарска наука појављује се средином 60-тих година прошлог века, када се учи на универзитетима уз математику, првенствено ради теоретских истраживања и решавања нумеричких задатака. Појава персоналних рачунара 80-тих, а поготову 90-тих година омогућиће наставу информатике прво у средњим школама, ученици су се образовали за програмерске послове. Захваљујући даље новом графичком окружењу настава информатике се уводи и у основне школе, при чему је примарна рачунарска писменост.

Нове тенденције у образовању – рачунарска писменост за све доприносиће томе да се запостављају саме рачунарске науке, односно да се оне као такве уче скоро искључиво на универзитетском нивоу. Не смањујући потребу за рачунарском писменошћу, најновије тенденције у настави информатике као науке наглашавају потребу за развијањем алгоритамског начина мишљења.

Док су развијене земље користиле рачунар где год је то било могуће, мање развијене су развијале образовне програме за информатику као рачунарску науку. Када су се развијене земље, првенствено САД, суочиле са проблемом да имају мало кадра у области рачунарских наука, да је слабо интересовање студената за ову врсту студија јер не постоји добра основа, почело је истраживање каква је едукација ученика у овој области у појединим земљама које овде предњаче, попут Русије, Литваније, Пољске... Следило је доношење курикулума, повратак науци, а у свему томе придаје се велика важност наставнику као реализатору такве наставе.

Рад се бави анализом колико и како су заступљене у образовању у основним и средњим школама рачунарске науке код нас и у свету. Циљ рада је да се сагледа тренутно стање и да се понуде одговарајуће смернице у смислу осавремењавања наставних садржаја из предмета информатика ради веће заступљености самих рачунарских наука. Ово треба да допринесе развоју алгоритамског начина мишљења код ученика односно оспособљавању ученика за решавање проблема.

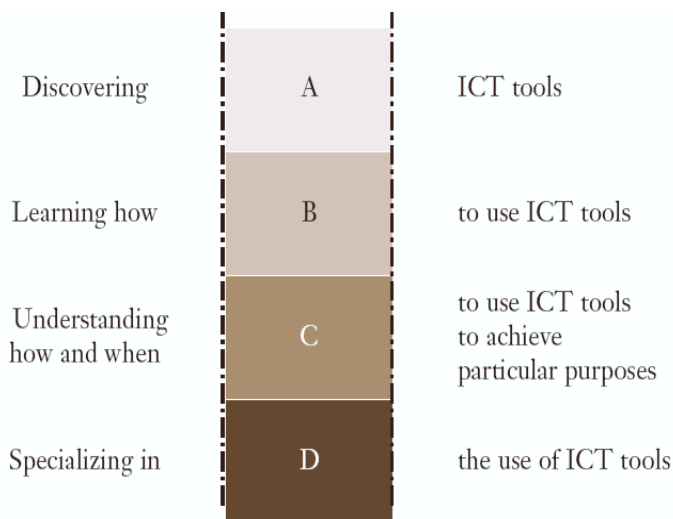
Информатичко образовање

Овладавање рачунарском писменошћу у данашње време спада у основна знања која су потребна за живот у информатичком друштву. Отуда и потреба за увођењем информатике у школе.

УНЕСКО

Још је 1994. године УНЕСКО објавио *A Curriculum for Schools, Secondary Education*, који се бави наставом информатике у средњој школи. Већ 2000. године јавља се потреба за увођење наставе информатике у основне школе, чије су основе дате у *Informatics for Primary Education*, а две године касније уследиће и *A Curriculum for Secondary Schools and Programme of Teacher Development* [1].

У свим овим документима захтева се одговорност школа, односно наставника, да оспособе ученике за коришћење ИКТ (Информационо Комуникационе Технологије) и да их припреме за живот у информатичком друштву. Главни мото је: информатика за све. УНЕСКО је разрадио модел од четири нивоа учења и подучавања, од откривања ИКТ алата, преко учења како користити ИКТ алате, до разумевања када и како користити одговарајуће ИКТ алате за различите сврхе, а највиши ниво се бави специјализацијом при коришћењу одговарајућих ИКТ алата (Слика 1).



Слика 1. УНЕСКО: модел нивоа учења и подучавања ИКТ

3 R's

Треба скренути пажњу да основна рачунарска писменост подразумева не само „читање и писање“, него залази и у део самих рачунарских наука. То је сликовито објашњено кроз такозвани **3 R's – The New Literacy**, где се појављују:

- **reading** – читање – налажење информација претраживањем различитих писаних извора, запажање и проучавање, те прикупљање и бележење одговарајућих података;
- **writing** – писање – коришћење хипермедије, као и укључивање свих типова информација и свих врста медија;
- **arithmetic** – дизајнирање објеката и процеса из стварног света те њихово моделирање и пројектовање.

CSTA Computer Science Teachers Association

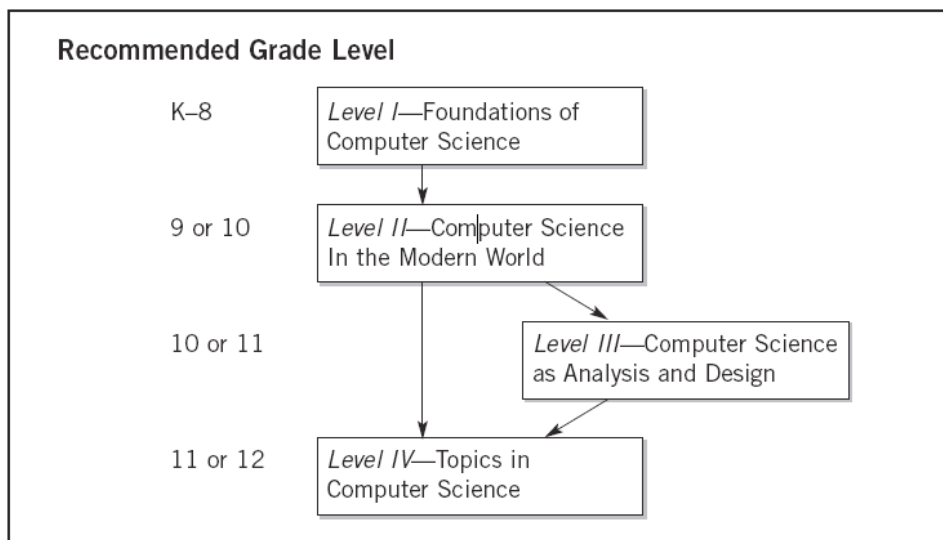
Модел курикулума

CSTA (*Computer Science Teachers Association*) публиковала је 2003. године *A Modell Curriculum for K-12 Computer Science* [2], где се бави питањем информатичког образовања од К-2 до К-12 (Слика 2).

Модел курикулума јавио се као национални интерес за разумевање рачунарских наука у савременом свету, а по угледу на земље које то већ имају, као што су Израел, Литванија, Бугарска, Румунија, Норвешка, Русија, Аустралија, Нови Зеланд.

Циљеви донетог курикулума огледају се у следећем:

- Оспособити ученике за разумевање рачунарских наука и њиховог места у савременом свету.
- Схватање рачунарских наука кроз преплитање рачунарских принципа и вештина.
- Оспособити ученике да користе рачунарске науке (пре свега алгоритамски начин мишљења) у решавању проблема из различитих области.
- Објединити ИТ (Information Technology) и АП (Advanced Placement) рачунарске науке у курикулум сваке школе.



Слика 2. Структура CSTA модела курикулума К-12 за рачунарске науке

У наставку је дат приказ садржаја курикулума у појединим нивоима образовања

К-8 *Level I – Foundations of CS* (основе)

К-2

- Коришћење рачунарске технике, стандардних улазних и излазних уређаја,
- Демонстрација позитивног етичког и друштвеног понашања при употреби технологије,
- Сарадња са друговима, наставником, породицом,
- Коришћење мултимедијалних садржаја за учење,
- Коришћење програма за цртање, писање, за развој логичког начина мишљења (одговарајуће игре),

- Разумевање како 0 и 1 могу репрезентовати информације,
- Разумевање сортирања – без коришћења рачунара.

К 3-5

- Коришћење технологије у свакодневном животу,
- Основне предности одговарајућег и последице неприкладног коришћења технологије,
- Самостално или кроз групни рад, креирање мултимедијалних презентација, њихово представљање у разреду,
- Коришћење on-line ресурса за решавање задатих проблема,
- Коришћење технолошких ресурса за самостално и додатно учење.

К 6-8

Алгоритамски начин мишљења у свакодневном животу

- Идентификовање и решавање свакодневних хардверских и софтверских проблема.
- Разумевање сталног развоја односно промене технологије и ефеката тих промена у друштву.
- Коришћење различитих софтверских алата за учење и истраживање.
- Дизајнирање, публиковање и представљање пред разредом (публиком) Веб презентација, видео записа.
- Разумевање и практична примена основа хардвера, софтвера, алгоритама.
- Логички начин мишљења као основа за решавање стварних животних проблема.

К 9 /10 *Level II – CS In the Modern World*

Алгоритми, програмирање и дизајнирање web страница

- Хардвер, софтвер, оперативни системи,
- Рачунарске мреже, организација интернета,
- Алгоритамски начин решавања проблема – поставка проблема, испитивање, дизајнирање, кодирање програма, тестирање и верификација,
- Виши програмски језици,
- Веза између математике и рачунарских наука,
- Идентификација различитих професија у рачунарским наукама.

К 10/11 *Level III – CS as Analysis and Design*

Програмирање и дизајнирање

- Методе и параметри,
- Рекурзија,
- Објекти и класе,
- Програмирање у графичком окружењу,
- Програмирање руковођено догађајима.

К 11/12 Level IV – Topics in CS

Изборни предмети у рачунарским наукама, припрема ученика за професију према њиховом интересовању.

Смернице за средњошколско образовање

CSTA 2005. године публикује и *The New Educational Imperative: Improving High School Computer Science Education* [3].

У овом документу се као најновије тенденције у настави информатике дефинишу три основне наставне целине:

- Образовна технологија: коришћење рачунара у настави,
- Информационе технологије: коришћење хардвера и софтвера ради управљања информацијама и
- Рачунарске науке: дизајнирање и имплементација софтвера, развијање ефективних начина за решавање рачунарских проблема, проналажење нових путева за употребу рачунара.

Рачунарске науке укључују следеће елементе:

- дизајнирање хардвера, мреже, графику, сигурност, базе података и информационе системе,
- софтверски дизајн, логику, програмирање, програмске језике, програмску парадигму, апстракцију података,
- вештачку интелигенцију,
- коришћење информационих система,
- друштвена очекивања у смислу приватности података и безбедности на Интернету.

Пре него што се окренемо рачунарским наукама, неопходно је срушити неке заблуде:

- Рачунарске науке = програмирање,
- Рачунарске науке = рачунарска писменост,
- Рачунарске науке = алат у другим наукама,
- Рачунарске науке = област којом се баве мушкарци,
- Рачунарске науке НИСУ научна дисциплина.

Уместо тога, треба да се окренемо основним принципима рачунарских наука:

- Информатичке инструкције треба да су фокусиране на решавање проблема и алгоритамски начин мишљења.
- Информатика треба да буде независна од специфичности апликативног софтвера, програмских језика и окружења.
- Информатика треба да буде у служби решавања проблема из стварног окружења.

- Информатичко образовање треба да буде добра основа за професионално коришћење рачунара у другим дисциплинама.

Рачунарске науке – стање у појединим земљама у свету

Приликом прављења модела курикулума [2], као и у смерницама за средњошколско образовање [3], главно питање на које је требало одговорити било је шта и како подучавати. CSTA се руководила искуствима појединих земљама у свету. У наставку су приказане неке од прикупљених информација.

С друге стране, курикулум CSTA постао је полазна основа за покретање бројних питања у настави информатике не само у САД него и много шире. Следе интернационалне конференције које се баве питањем наставе информатике у средњој школи:

- *From Computer Literacy to Informatics Fundamentals: ISSEP 2005, Klagenfurt, Austria, March 30–April 1, 2005.*
- *The bridge between using and understanding computers: ISSEP 2006, Vilnius, Lithuania, November 7–11, 2006.*
- *Informatics education: Supporting Computational Thinking: ISSEP 2008 Torun, Poland, July 1–4, 2008.*
- ... ISSEP 2010 Zurich, Switzerland, January 13–16, 2010.

Осим анализе постојећег стања у појединим земљама, основна питања која се разматрају на конференцијама обухватају *шта* и *како* учити ученике: курикулум у информатици и основе, интеграција информатике са другим областима, коришћење информатичких алата у другим областима, те дидактика информатике и едукација наставника.

Анализирајући стање у Европској унији 2004. године [3] дошло се до закључка да све земље имају наставу информатике уграђену у националне курикулуме, али се она разликује од једне до друге земље. Углавном је мање орјентисана на рачунарске науке, а више на рачунарску писменост. Неке од земаља, попут Бугарске, Румуније, Норвешке, Израела имају уграђену наставу информатике у курикулуме и основних и средњих школа, као основне и напредне курсеве. Рачунарске науке су посебно добро заступљене у настави информатике у Пољској и Литванији, затим у Румунији и Бугарској.

Литванија [4]
информатика за све

К 6-7

- основе;
- употреба рачунара;

К 9-10

- Алгоритми;
- Хардвер и софтвер;
- Информационе технологије;

К 11-12

- изборни курсеви: програмирање, базе података, мултимедија.

Пољска [5]

- К 1-6 коришћење апликативног софтвера и едукативног софтвера за учење других предмета;
- К 7-9 алгоритми, алгоритамски начин мишљења и решавања проблема, (Лого – као први степен учења програмирања, небавезно);
- К 10-12 информационе технологије као помоћ у учењу других наука, у обавезном делу, а у изборном делу програмирање, базе података и мултимедија.

Канада [3]

- К-10 основе – рачунарске мреже, оперативни системи, апликативни софтвер;
- К-11 структуре података, решавање проблема и програмирање;
- К-12 алгоритми и програми, развој софтвера, пројектовање.

Јужна Африка [3]

К 9-12

- Хардвер и системски софтвер (20%);
- е-комуникација (12%);
- Социјални и етички токови (8%);
- Програмирање и развој софтвера (60%).

САД [3]

Level II, Level III:

- Рачунари; Информациони системи; Рачунарске мреже;
- Дигитална презентација података;
- Организација података;
- Моделирање и апстракција;
- Алгоритамски начин мишљења и програмирање;
- Универзалност – да ради на сваком рачунару;
- Ограничења информационе технологије;
- Социјални утицај.

Израел [3]

- Основе – обавезан курс;
- Изборни модул – дизајнирање софтвера.

Посебно је овде интересантно нагласити да се захтева учење две програмске парадигме, да би обезбедили различите начине алгоритамског мишљења и различите начине за решавање проблема.

Русија - пројекат ИНФОРМАТИКА-21 [6]

Русија је увек имала значајно место у математици као науци, а када су се појавили рачунари, уз математику су почеле да се изучавају и рачунарске науке које су врло брзо добиле своје место не само на универзитетском већ и у школском образовању. Русија је тако, осим изванредних резултата у такмичењима из математике, добила и изванредне такмичаре у области програмирања. Међутим, појава графичког окружења допринела је и тежњи за одговарајућим програмима, те је Русија одједном постала преплављена ненационалним софтвером. У страху од експанзије *Microsoft*ових алата, почела је жестока осуда истих. Па ипак се у пракси све више осетило запостављање програмирања у корист рачунарске писмености на једној страни, или су, с друге стране, почели да се користе западни алати за програмирање, пре свега *Microsoft*ови *Basic* и *C/C++*, јер је окружење *Pascal*а који се до тада учио постало непопуларно.

Схвативши да је *Pascal* застарео Русија је у ситуацији да ли да прихвати да више није водећа светска сила у програмирању, или да изгради нови пројекат. *Delphi*, који у позадини има *Pascal*, није био право решење, наводно због своје преобимности. Осим тога, и *Delphi* је вероватно завршио свој развојни пут. Осмишљен је програм ИНФОРМАТИКА-21, његов старт је 2001/02. година, а основни циљ пројекта је:

- Координација науке, образовања, ИТ-индустрије на постсовјетском простору ради изградње јединственог савременог система враћања фундаменталним основама програмирања, а ослањајући се на сопствене образовне и математичке традиције.

Почасни консултант пројекта је Николаус Вирт, творац *Pascal*а, чији су ученици имали задатак да створе нови програмски језик, такозвани Компонентни *Pascal* / *Oberon* (*Component Pascal*) који ће задржати сву једноставност *Pascal*а, језика који је одувек сматран најбољим у образовању, за прве кораке учења програмирања. Компонентни *Pascal* ради у визуелном окружењу, садржи богату библиотеку компоненти, модуларност, има брз компајлер, по ефикасности не заостаје за *C* језиком, ради на свим платформама, почев од MS Windows 3.1, на диску заузима 20 Mb, дистрибуција 6 Mb, бесплатан. Нови систем програмирања добио је име *BlackBox Component Builder*.

Начин остварења циља огледа се у следећем:

- У образовни систем увести, уместо *Turbo Pascal*а, језик Компонентни *Pascal* као једину платформу у настави информатике – програмирања.
- Вратити примат програмирању.
- Компонентни *Pascal* комплетно угради у наставу (почетак наставе програмирања 8 разред, почиње се са цртањем блок шеме).
- Превести старе курсеве *Pascal*-а на Компонентни *Pascal*, где су потребне минималне измене.

- Модификовати програм услед нових могућности програма.
- Остварити везу до других предмета (физика, хемија...).
- Припремити нове задатке за такмичења све до олимпијада.

Стање код нас

У школском образовању код нас ученици се први пут упознају са основама рачунарског система у оквиру наставе техничког образовања, почев од петог разреда основне школе, да би у шестом и седмом разреду кроз неколико часова обрађивали оперативни систем, те користили MS Paint и Word Pad. У осмом разреду део наставе техничког образовања обухвата структуру рачунара и комуникације. Предмет је изборни предмет у основној школи, а његов садржај се базира на детаљнијем савладавању рачунарске писмености. Програмирање је изборни модул (у већ изборном предмету), те као такав може бити планиран са десетак часова наставе. Изузетак су огледна одељења при неким гимназијама (Београд, Нови Сад, Ниш и Крагујевац), за ученике специјално обдарене за математику, где је појачана настава програмирања. Да је стање потпуно несређено, огледа се и у шароликости у избору програмског језика, парадигме и окружења, услед чега су на такмичењу основних школа у програмирању, дозвољени различити компајлери:

- *Free Pascal v2.2.2*;
- *Qbasic (kompatibilan sa FreeBasic v0.02)*;
- *Visual Studio Express Edition 2008 (Visual Basic, C/C++, C#)*;
- *DevCpp v4.9.9.2*.

Тек средња школа, први разред, доноси обавезан предмет Рачунарство и информатика, где се инсистира на рачунарској писмености за све. Настава овог предмета у другом разреду наставиће се у гимназијама, опет као рачунарска писменост, да би се овде тек у трећем разреду појавило програмирање, програмски језик *Pascal*, у четвртном разреду *Delphi* (природно-математички и општи смер), односно базе података на друштвено-језичком смеру. Базе података су заступљене и у средњим школама економске струке. Програмирањем ће се још бавити ученици електротехничке струке (програмски језик *C*), а још неке средње школе имаће наставу информатике ради учења апликативнивог софтвер у служби своје струке. Изузетак су опет математичка и рачунарска гимназија, односно одговарајућа одељења у гимназијама (Нови Сад, Ниш и Крагујевац), где се уче рачунарске науке кроз више стручних предмета.

Обавезно учење рачунарске писмености тек у средњој школи у време у коме су ученици одрасли уз рачунаре и када су ово градиво углавном савладали или самостално или кроз изборни предмет у основној школи води слабој мотивацији ученика за рад. Програм наставе који предвиђа савладавање одређених програмских апликација, као учење појединих алата и њихових алатки, на начин како је то дато у уџбеницима, одговара начину учења одраслих, када уче алат који им је потребан у служби струке. Праве стратегије код нас нема, што је лоше утицало и на наставне планове и садржаје.

Предлог за побољшање стања код нас

Ради побољшања стања у информатичком образовању код нас неопходно је прво донети одговарајућу стратегију према којој би се даље саставили планови и програми. Ученик треба на организован начин и постепено да се оспособљава за коришћење алата ИКТ (Информационо Комуникациона Технологија) почев од нижих разреда основне школе. При томе треба водити рачуна да није примарно учење самог алата, него његово коришћење ради решавања постављеног проблема. Рачунарске науке треба да замене рачунарску писменост већ у завршним разредима основне школе, а поготову од самог почетка средње школе, првенствено кроз учење програмирања, при чему треба инсистирати на алгоритамском начину мишљења. У планове и програме свакако треба увести савремене програмске алате.

Закључак

Настава информатике би требала првенствено да се окрене ка рачунарским наукама, да од ученика тражи алгоритамски начин мишљења и да их оспособи за решавање постављеног проблема. Уместо учења коришћења алата ИКТ (Информационо Комуникациона Технологија), ученике треба оспособити за решавање проблема уз коришћење ИКТ технологије. Учење програмирања, такође, треба да помогне ученику у налажењу начина за решавање проблема, захтева алгоритамски начин мишљења, независно од програма и платформе, а само писање програма после треба да буде само ствар технике. Ситуација у Русији показује потребу за коришћење нових алата у визуелном окружењу, да би се постигла већа мотивисаност за рад.

Уколико се настава гледа на овај начин, онда је, по угледу на Пољску и Литванију, а чему се тежи и у наставничким захтевима (CSTA, интернационалне конференције), пожељно наставу овог предмета уградити у курикулуме почев од основне школе.

Док овладавање рачунарском писменошћу у данашње време спада у основна знања која су потребна за живот у информатичком друштву, решавање проблема уз помоћ ИКТ и уз алгоритамски начин мишљења треба да оспособи ученике за трајно самостално учење и решавање животних проблема.

Литература

- UNESCO (2002): *Information and Communication Technology in Education, a Curriculum for Schools and Programme of Teacher Development*, Division of Higher Education, UNESCO, France, <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129538e.pdf>
- CSTA (2003), *A Model Curriculum for K-12 Computer Science*, Final Report of the ACM K-12, <http://www.csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/K-12Model-Curr2ndEd.pdf>

- CSTA (2005), *The New Educational Imperative*, by CSTA Curriculum Improvement Task Force
- Valentina Dagiene, Gintautas Dzemyda, Mifodijus Sapagovas (2006): Evolution of the Cultural-Based Paradigm for Informatics Education in Secondary Schools - Two Decades of Lithuanian Experience, *Informatics Education - The Bridge between Using and Understanding Computers, International Conference in Informatics in Secondary Schools - Evolution and Perspectives, ISSEP 2006*, Vilnius, Lithuania, <http://www.springerlink.com/content/a7241855rh858132/>
- Maciej M. Syslo, Anna Beata Kwiatkowska (2008): The challenging Face of Informatics Education in Poland, *Informatics Education – Supporting Computational Thinking, Third International Conference on Informatic in Secondary Schools*, Torun, Poland, Proceedings.
- Русија, пројекат INFORMATIKA-21 (2006), <http://www.inr.ac.ru/~info21/>
- Планови и програми за предмет Рачунарство и информатика код нас, Службени гласник Републике Србије, Просветни гласник, 2/2002, 5/2003, 10/2003, 11/2004, 18/2004, 24/2004, 3/2005, 2/2006, 12/2006, 17/2006, 1/2008, 8/2008, 1/2009, 8/2009.

Svetlana Maletin, Miloš Racković, Novi Sad

COMPUTER SCIENCE IN PRIMARY AND SECONDARY SCHOOL IN OUR COUNTRY AND WORLDWIDE

Summary

The most recent trends in teaching computer science (The New Educational Imperative, CSTA, 2005) define three basic teaching units: Educational technology – Computer Applied Learning, Information Technology – hardware and software application in information control, and Computer Science – software design and implementation, developing effective approaches in dealing with software problems, finding new potentials in computer application.

Software and hardware development nowadays initiated the development of numerous user tools. Thus, teaching computer science in primary and secondary schools is mostly based on learning how to use them, i.e. computer literacy. Learning computer science itself, primarily designing software programs, program languages, program paradigms, and using logic as well, is not a usual practice. The article analysis actual extent of learning computer science in primary and secondary schools in our country and worldwide. The data was collected from educational strategies of USA, Russia, Litvania, and several more countries.

Key words: technique, computer science, education

Светлана Малетин, Милош Рацкович, Новый Сад

КОМПЬТЕРНЫЕ НАУКИ В НАЧАЛЬНОЙ И В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ В МИРЕ И У НАС

Резюме

Новейшие тенденции в процессе обучения информатики (The New Educational Imperative, CSTA, 2005) определяют три основных учебных целей: Образовательная технология – использование компьютеров в процессе обучения, Информационные технологии – использование оборудования и программного обеспечения с целью управления информацией и Компьютерные науки – дизайн и применение программного обеспечения, развитие эффективных способов для решения компьютерных проблем, открытие новых путей для употребления, использования компьютеров.

Развитие оборудования и программного обеспечения в настоящее время обусловило большое число инструментов которые используются и поэтому изучение информатики в начальных и средних школах главным образом занимается изучением, усовершенствованием их, то есть так называемой компьютерной грамотностью. Изучение самих компьютерных наук, прежде всего изучение программирования, программных языков, программного образца и в первую очередь логики, применены незначительно и по разному. В настоящей работе сделан анализ того, насколько и как применяются в образовании в начальных и средних школах компьютерные науки у нас и в мире. Материалы собраны из стратегий образования в США, России, Литвы и ещё нескольких стран.

Опорные слова: техника, информатика, образование

Др Ђорђе Херцег
Природно-математички факултет
Нови Сад

UDK 371.3:004
UDK 373.3:371.3]:004
UDK 373.5:371.3]:004
Прегледни чланак
Примљен: 25. XII 2009.
BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 991–999

ЏОЈСТИК У НАСТАВИ

Резиме

*У настави се често посматрају проблеми који зависе од више улазних параметара. Рачунарски програми омогућавају да се такви проблеми прикажу у виду интерактивних примера, који се мењају како корисник мења параметре. Контролисање улазних параметара се, међутим, скоро увек ослања на унос преко тастатуре и миша, што значи да се у већини интерактивних примера у једном тренутку може контролисати само један параметар. Са друге стране, рачунарске игре, попут симулација вожње или летења, захтевају истовремену контролу више параметара и у ту сврху су развијени приступачни и широко распрострањени контролери за игру, попут џојстика, волана и *gamepada*. У овом раду илуструјемо примену контролера за игру у визуализацији и контроли интерактивних математичких примера.*

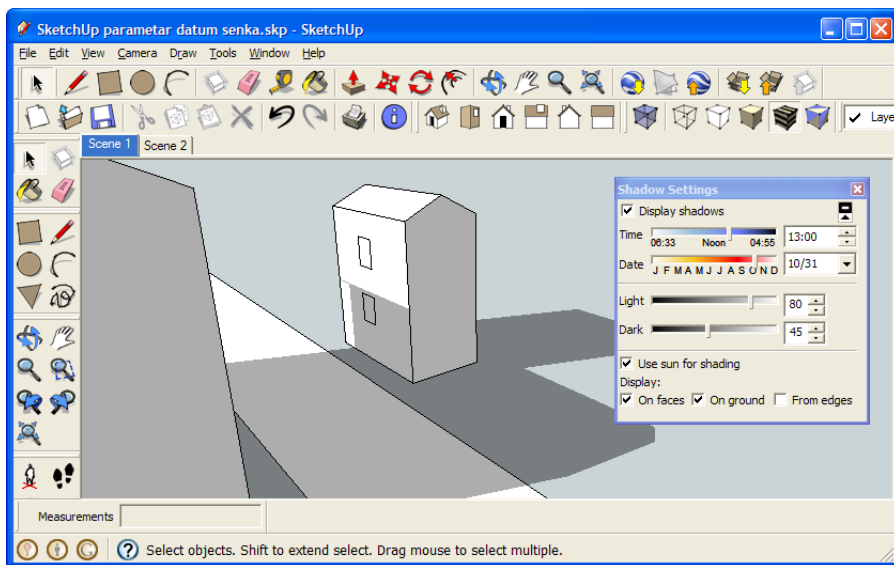
Кључне речи: рачунари у настави, интерактивни примери, џојстик

Интерактивни примери

Рачунари омогућавају припрему и презентовање наставног материјала, припрему примера за самостални рад, као и задатака за тестове. Рачунар се може користити на различите начине, што зависи од више фактора, а пре свега од труда, времена и вештине које је потребно уложити у припрему материјала и извођење наставе помоћу рачунара. Користећи PowerPoint, наставник може да припреми материјал који садржи статичне слике и презентације. Уз мало више труда, могу се направити анимације или видео записи, који, на пример, приказују ток неког експеримента или математичког поступка. Најбољи ефекат, међутим, имају примери који нису статични, него зависе од више параметара. Уколико се ти параметри могу мењати у реалном времену, док се истовремено, на екрану, приказ примера ажурира у складу са њима, тада кажемо да имамо *интерактивни пример*. Овакви примери су веома погодни за приказивање ученицима, али су исто тако погодни и за њихов самостални рад и учење кроз експеримент и

откривање, јер им се омогућава да они сами испробају како се посматрани проблем понаша за све вредности параметара. На тај начин ученици могу слободно да експериментишу и да пронађу одговоре на питања попут: „Шта ће се десити ако повећавам један параметар, док истовремено смањујем други?“ или „Како се цртеж понаша ако вредности мењам полако, а како ако их мењам брзо?“

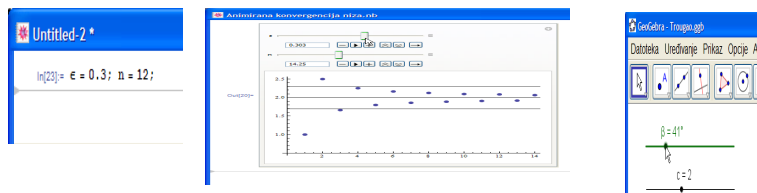
Употребу параметара илустроваћемо на примеру из географије. У програму Google SketchUp је нацртана стамбена зграда, на којој су означени положаји два стана. Нацртана је, такође, и висока пословна зграда која се налази са друге стране улице. Географски положај и оријентација зграда одговарају стварном стању. SketchUp може да прикаже како већа зграда прави сенку на мањој, у зависности од датума и доба дана. Померајући клизаче за датум и време у прозору *Shadow Settings*, можемо истовремено да посматрамо како се сенка помера. Тако можемо да приметимо да је у пролеће и лето стан у приземљу скоро увек на сунцу, док се у јесен и преко зиме налази у сенци. Ово може бити значајно ако размишљамо о куповини тог стана.



Слика 1. Подешавањем датума и времена добија се реалистичан приказ сенке за задату географску локацију

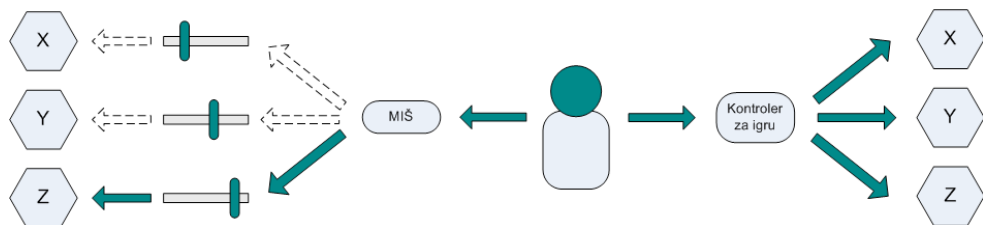
Задавање параметара

Задавање параметара у интерактивним примерима обично се обавља на два начина: уношењем бројчаних података преко тастатуре, или померањем клизача (*slider* на енглеском) помоћу миша. Унос преко тастатуре очигледно је најспорији, мада омогућава прецизно задавање жељених вредности. Клизач је бољи, јер омогућава континуалну промену вредности параметра у неком интервалу, док се истовремено илустрација или нумерички подаци мењају на екрану.



Слика 2. Задавање параметара уносом са тастатуре или помоћу клизача у *Mathematici* и *GeoGebra*

Међутим, клизач на екрану је само графичка представа правог клизача (равног или кружног потенциометра) у стварности и, као такав, он не пружа физички осећај да се њиме нешто мења. Штавише, прави клизачи се могу користити и без гледања, а клизачи на екрану су обично веома мали и потребно их је прецизно погодити мишем да би се могли користити. Поред тога, мишем се у једном тренутку може контролисати само један клизач. Миш и клизач на екрану заправо представљају посредан начин управљања параметрима који је наметнут ограничењима корисничког интерфејса данашњих рачунара.



Слика 3. Мишем се може контролисати само један параметар у једном тренутку, а помоћу контролера за игру је могућа контрола више параметара истовремено

Постоји једноставно решење којим се ови проблеми могу превазићи. Контролери за игру, који се израђују у неколико варијанти (џојстик, волан, gamepad), данас су широко распрострањени и доступни по приступачним ценама. Независно од изведбе, они поседују барем две, а често и више аналогних оса, од којих свака производи вредности из неког интервала, обично $[-1, 1]$ или $[0, 65535]$, што зависи од конкретне имплементације. Наравно, ове вредности се одговарајућим функцијама могу пресликати у произвољан интервал. Gamepad уређај приказан на слици има два џојстика са по две аналогне осе, један дигитални контролер са две осе и десет тастера, који производе исто толико логичких вредности (0 или 1). Ако се свака од контрола са уређаја повеже са по једним параметром у програму, онда се померањем џојстика и притискањем тастера може контролисати приказ на екрану рачунара. Добре стране овог приступа су то што се више параметара може лако контролисати одједном, као и то да ученици могу да се користе контролер без гледања и да се усредсреде на резултате својих акција на екрану. Приказаћемо могућности употребе контролера за игру на неколико примера.

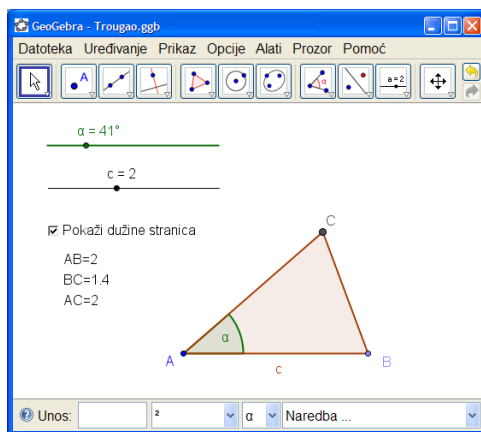


Слика 4. Џојстик, волан и gamepad са 4 аналогне и 2 дигиталне осе

GeoGebra

Пример из геометрије, реализован у програму GeoGebra, приказује једнакокраки троугао који је задат дужином једног крака AB и углом α између кракова. Овај пример је дат ученицима, са задатком да одреде дужину крака AB и угао α тако да троугао ABC буде једнакостранични. Разликујемо два случаја.

- Угао α различит од 60° . Померањем клизача c и посматрањем дужина страница ученици виде да ниједан троугао, који на тај начин настане, није једнакостранични.
- Угао α је једнак 60° . Померањем клизача c и посматрањем дужина страница ученици виде да сваки троугао, који на тај начин настане, јесте једнакостранични.



Слика 5. Ученици имају задатак да подешавањем угла и дужине крака добију једнакостранични троугао

Очигледно је да је једнакокраки троугао потпуно одређен када му је задата дужина крака и угао при врху. Иако у овом примеру изгледа као да је параметар c сувишан, он заправо треба да подстакне ученике да генерализују своје разматрање датог примера и да дају закључак који може да гласи: „За било коју дужину крака, једнакокраки троугао постаје једнакостранични ако му је угао при врху 60° “.

У овом примеру се појављује потреба за истовременом контролом оба параметра, a и c . Иако GeoGebra подржава само унос помоћу тастатуре и миша, она има и JavaScript интерфејс који се може искористити за контролу GeoGebra из неког спољашњег програма. Развили смо помоћни програм који читава стање контролера за игру и преноси га у GeoGebra. Наш програм ради на .NET платформи за Windows оперативне системе и подржава све DirectX компатибилне аналогне контролере за игру.

Mathematica

Mathematica препознаје све стандардне контролере за игру, који се у њој могу користити за подешавање параметара у интерактивним примерима. Функција **Manipulate** приказује задати пример на екрану, заједно са клизачима који контролишу параметре. Ти клизачи се могу померати мишем или контролером за игру, а ако затреба, подаци се могу унети и преко тастатуре. Овде приказујемо два карактеристична интерактивна примера.

Конусни пресеци

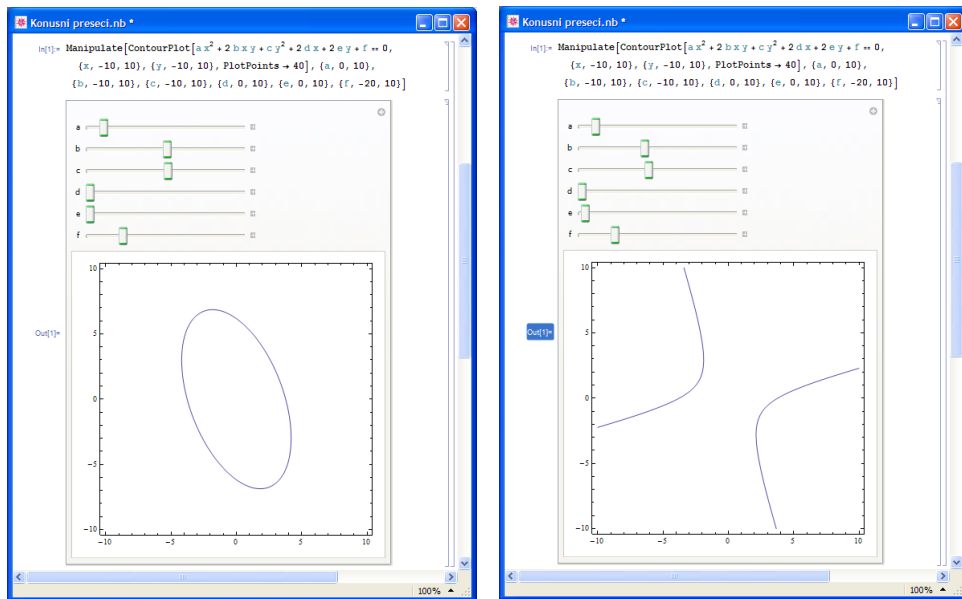
Посматрамо једначину конусног пресека у општем облику, која гласи:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Ручно цртање ових кривих је сувише компликовано; међутим, уз *Mathematica* оне се једноставно цртају, задавањем следеће наредбе:

```
Manipulate[ContourPlot[ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f =  
= 0, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotPoints  
→ 40], {a, 0, 10}, {b, -10, 10}, {c, -10, 10}, {d, 0, 10}, {e, 0, 10}, {f, -20, 10}]
```

Функција Manipulate приказује интерактивни график и задаје интервале у којима се параметри крећу. Пажљивим одабиром параметара могуће је добити све три врсте кривих, у бесконачно много варијанти.



Слика 6. Елипса и хипербола

Ученици могу да подешавају свих шест параметара истовремено и да истовремено посматрају како се на цртежу смењују елипсе, параболе и хиперболе. Наставник треба да постави питање: „Од којих параметара зависи тип криве?“ и да од ученика тражи одговор.

Након неког времена, наставник може дати формални одговор. Од шест параметара који се појављују у овој једначини, три одређују тип криве:

- ако је $b^2 < ac$, добија се елипса,
- ако је $b^2 = ac$, добија се парабела,
- ако је $b^2 > ac$, добија се хипербола.

Конвергенција низа

Појам конвергентног низа уводи се прво интуитивно, преко примера, а затим се даје дефиниција. Интерактивни примери који илуструју појам конвергенције су израђени и у *Mathematici* и у GeoGebri. Контролер за игру се и у овим примерима може употребити за управљање параметрима.

Пример. Дат је низ

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

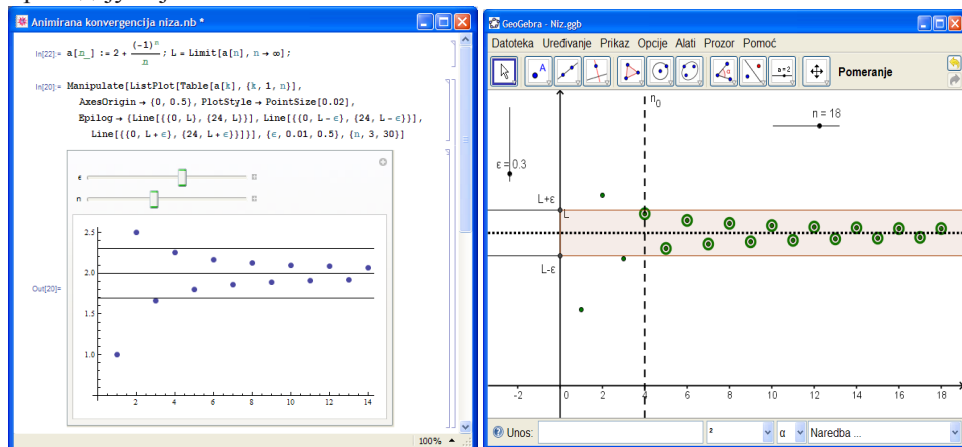
Посматрамо табелу вредности a_n за првих неколико вредности n .

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	2.5	1.6666...	2.25	1.8	2.1666...

Уочавамо да се вредност a_n све више приближава броју 2 како се n повећава, али да никада није 2. Због тога кажемо да је 2 гранична вредност низа a_n , што записујемо као

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2.$$

Mathematica и *GeoGebra* могу да прикажу низ на графику и да означе област $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, тако да се за свако задато ε види како чланови низа за $n \geq n_0$ припадају тој области.



Слика 7. Приказ чланова низа који конвергирају ка граничној вредности, *Mathematica* и *GeoGebra*

Дефиниција. Број L је гранична вредност низа a_n ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0 (који зависи од ε), такав да је $|a_n - L| < \varepsilon$ за свако $n \geq n_0$.

При увођењу појма граничне вредности низа изузетно је важно нагласити да за свако позитивно ε постоји природан број n_0 , такав да сви чланови низа a_n почев од a_{n_0} припадају интервалу $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Мењајући ε овај интервал се мења, као и број n_0 . Визуелизација овог процеса се може лепо приказати увођењем два параметра (ε и n) и приказивањем чланова низа a_n и по-

себним обележавањем оних чланова посматраног низа који припадају интервалу $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Закључак

Интерактивни примери, чији резултат зависи од улазних параметара, представљају изузетно ефектно средство за презентовање материје ученицима. Поред тога што је динамички приказ занимљивији од статичне илустрације, он приказује, не само стање за један усамљен случај, него и начин на који се посматра ни пример понаша када се параметри мењају. Рад са интерактивним примерима може значајно да се олакша употребом контролера за игру, јер они омогућавају ученицима да сву пажњу посвете дешавању на екрану рачунара и да истовремено контролишу више параметара. *Mathematica* стандардно подржава контролере за игру, док се за GeoGebra та подршка може релативно једноставно додати.

Литература

- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with Geogebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7.
[\(<http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html>\)](http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html)
- BECTa. (2007). *The impact of ICT in schools – a landscape review*: British Educational Communications and Technology Agency (BECTa).
[\(<http://publications.becta.org.uk/display.cfm?resID=28221&page=1835>\)](http://publications.becta.org.uk/display.cfm?resID=28221&page=1835)
- Kirriemuir, J. (2002). Video Gaming, Education and Digital Learning Technologies. *D-Lib Magazine*, Volume 8 Number 2.
[\(<http://www.dlib.org/dlib/february02/kirriemuir/02kirriemuir.html>\)](http://www.dlib.org/dlib/february02/kirriemuir/02kirriemuir.html)
- Microsoft.DirectX.DirectInput Namespace, *MSDN Library*
[\(\[http://msdn.microsoft.com/en-us/library/bb318766\\(VS.85\\).aspx\]\(http://msdn.microsoft.com/en-us/library/bb318766\(VS.85\).aspx\)\)](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/bb318766(VS.85).aspx)

Dorđe Herceg, Ph. D., Novi Sad

JOYSTICK IN TEACHING ACTIVITY

Summary

Problems that depend on several input parameters are often considered in teaching activity. Software programs enable their presentation in the form of interactive problems, which alter whenever user changes parameters. However, monitoring input parameters almost always depend on their application using the keyboard and mouse, which means that in most interactive examples, only one parameter could be monitored at a time. On the other hand, computer game such as driving or flying simulation

seek for simultaneous control of several parameters. Thus, accessible and widely used game controllers have been developed, such as joystick, steering wheel and gamepad. The article presents the application of game controllers in visualisation and control of interactive mathematical examples.

Key words: computers in teaching activity, interactive examples, joystick

Д-р Джордже Герцег, Новый Сад

ДЖОЙСТИК В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Резюме

В процессе обучения часто привлекают внимание проблемы которые зависят от многих входных параметров. Компьютерные программы дают возможность такие проблемы показать в виде взаимодействующих примеров, которые меняются так как пользователь меняет параметры. Однако, контроль входных параметров почти всегда опирается на ввод через клавиатуру и мышь, а это значит что в большинстве взаимодействующих примеров в определённый момент может контролировать только один параметр. С другой стороны, компьютерные игры, как на пример симуляция ездь или летения, требуют одновременный и широко нескольких параметров и с той целью развиты доступные и широко распространённые контролёры в игре, как на пример джойстик, руль и Gamepad. В настоящей работе мы иллюстрируем применение контролёра в игре в визуализации и в контроли взаимодействующих математических примеров.

Опорные слова: компьютеры в процессе обучения, взаимодействующие примеры, джойстик

Ђурђица Такачи

Природно-математички факултет, Нови Сад

Јасминка Радовановић

Гимназија „Исидора Секулић” Нови Сад

Стручни чланак

Примљен: 25. XII 2009.

BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 1000–1006

О ВИЗУАЛИЗАЦИЈИ ИЗВОДНЕ ФУНКЦИЈЕ

Резиме

У раду се приказује визуализација изводне функције, на основу геометријског тумачења првог извода функције, као и граничне вредности количника прираштаја, коришћењем динамичких особина програмског пакета GeoGebra.

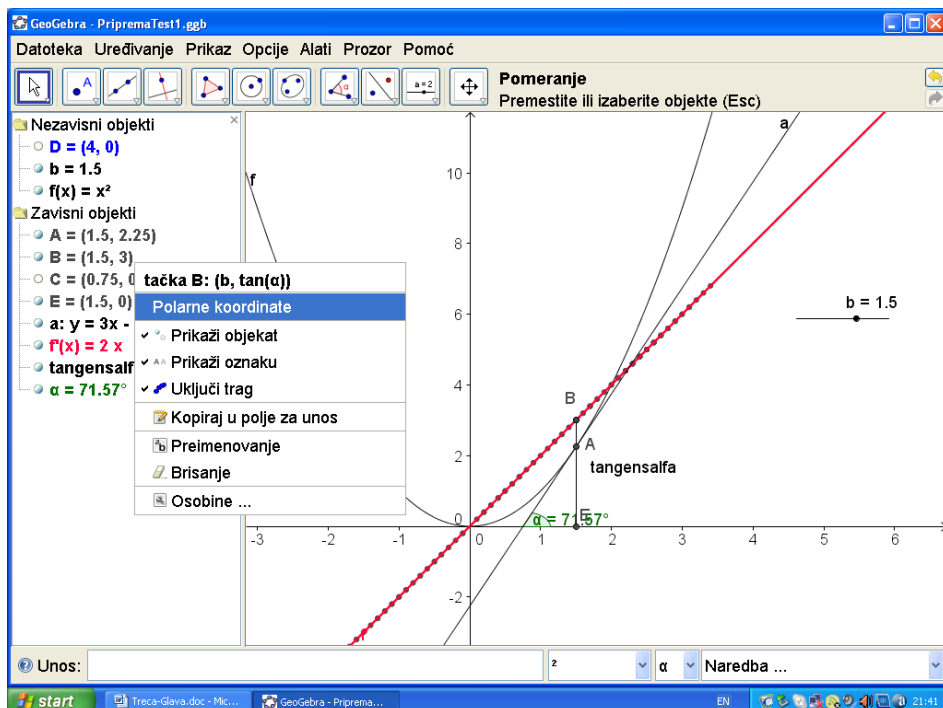
1. Увод

Извод функције је један од основних појмова више математике, чија обрада захтева више математичко мишљење, засновано на дефиницији, особинама и теоремама које следе из дефиниције. Због тога је веома важно да ученици правилно разумеју дефиницију првог извода функције у тачки, тумачења првог извода, као и изводну функцију са којом се највише раде. У данашње време, с обзиром на све присутније рачунаре у настави, постоје широке могућности визуализације математичких садржаја, па се у литератури наставе математике посвећује велика пажња ([1], [2], [3], [4]), обради појмова више математике применом различитих програмских пакета. У књизи [5], и радовима [6], и [7] користили смо програмски пакет *Scientific WorkPlace* за визуализацију појмова више математике. У радовима [10] и [11] смо се бавили дефиницијом првог извода и изводне функције, визуализацијом граничног процеса, помоћу програмских пакета *Scientific WorkPlace* ([10]) и *Mathematica 6* ([11]).

У овом раду приказаћемо, помоћу програмског пакета *GeoGebra*, добијање изводне функције на основу геометријског значења првог извода, што је приказано у другом делу, као и добијање „приближне“ изводне функције, из количника прираштаја, што је приказано у трећем делу. Оба приказана поступка радили смо са заједно са ученицима четвртог разреда гимназије математичког и природно-математичког смера, приликом систематизације садржаја везаних за примену извода. Ученици су радили у рачунарској учионици и били веома задовољни оваквим начином рада. На писменом задатку су показали заиста одличне резултате, знатно боље од ученика који нису понављали градиво на овај начин.

2. Визуализација изводне функције

У овом делу рада приказаћемо одређивање графика изводне функције коришћењем графичког приказа коефицијента правца тангенте у датој тачки на дату криву, која представља график дате функције, користећи динамичке особине програмског пакета *GeoGebra*.



Слика 1.

Посматра се тачка $A(b, f(b))$, која може да „шета” по кривој коју одређује функција $f(x) = x^2$, што се постиже помоћу клизача b (Слика 1), који ће одређивати абсцису тачке A . Затим се нацрта тангента у тачки A , као и тачка $B(b, \tan(\alpha))$ где је α угао који тангента заклапа са позитивним смером x -осе. Ако се тачки B укључи траг, тада се са померањем клизача b , односно променом абсцисе тачке A , добијају тачке које одређују график првог извода функције f , који је на слици 1, приказан тачкицама. На истој слици је приказан и график првог извода дате функције $f'(x) = 2x$, где се види да горе поменуте тачкице припадају овом графику.

Примећујемо да тачка $B(b, \tan(\alpha))$ има ординату која је једнака $\tan(\alpha)$, где је α угао који тангента, у тачки $A(b, f(b))$, на криву која је график функције f , заклапа са позитивним смером x -осе, што одговара коефицијенту правца пос-

матране тангенте. Коефицијент правца тангенте у датој тачки A на криву, која је график посматране функције f , одговара првом изводу функције f' у датој тачки A . Значи променом абсцисе тачке A , мењају се вредности коефицијента правца тангенте у тачки A , на посматрану криву, које представљају ординате тачке B . На тај начин тачка B „описује” график првог извода функције f , што се види на Слици 1, где је нацртан и график првог извода, такође. Аналогно се поступак може једноставно применити и на друге функције. Као што видимо програмски пакет *GeoGebra*, захваљујући својим динамичким особинама омогућава, веома једноставно, само померањем тачке B , визуализацију првог извода, односно његовог геометријског тумачења.

Напоменимо да је приказани поступак методички веома користан за понављање геометријског тумачења првог извода, јер пружа један нови приступ обради једног појма који се веома тешко прихвата и правилно разуме. Овај поступак, који ученику и студенту пружа јасну слику потребе увођења и проучавања првог извода, може да примени само наставник или могу заједно са наставницима да раде и ученици, ако зато имају могућности.

3. Визуализација количника прираштаја

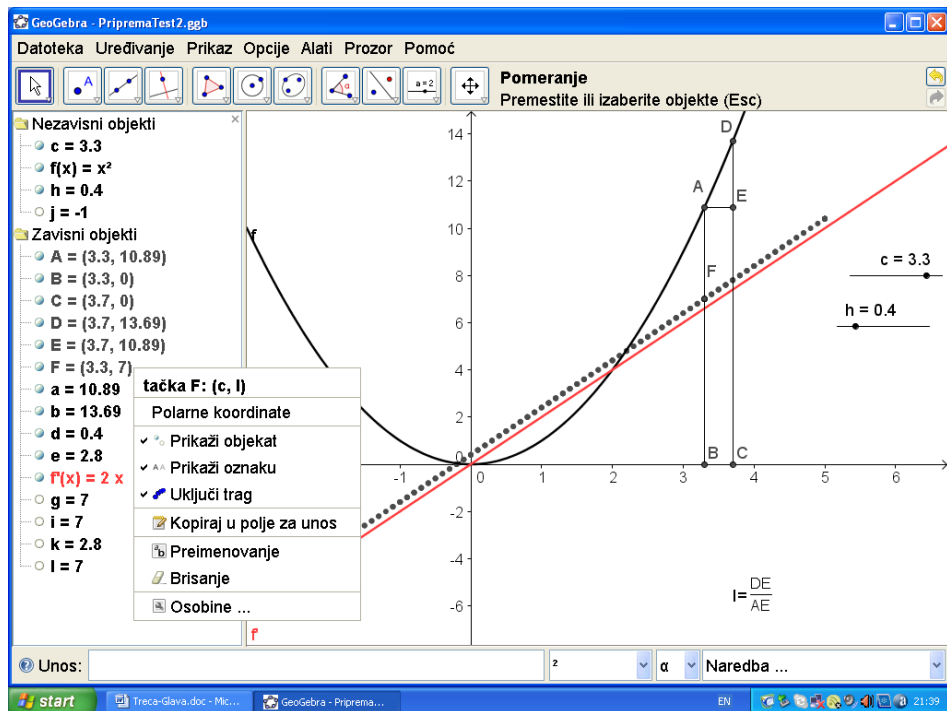
У овом делу рада приказаћемо један поступак визуализације количника прираштаја функције и прираштаја аргумента, са циљем „приближног“ одређивања графика изводне функције, на основу графика дате функције.

Поступак визуализације количника прираштаја, који ћемо приказати, методички је веома користан јер ученицима омогућава веома једноставно повезивање прираштаја функције и аргумента са првим изводом, односно са диференцијалом функције.

На Слици 2. дат је график функције $f(x) = x^2$, уведен је клизач c , који одређује абсцису посматране тачке $A(c, f(c))$ и клизач h . Уцртане су и тачке $E(c+h, f(c))$ и $D(c+h, f(c+h))$. Дужине дужи DE и AE су једнаке прираштајима функције f и аргумента у тачки h , респективно, а са l је означен количник прираштаја функције и прираштаја аргумента, $l = \frac{DE}{AE}$.

Прираштај аргумента везан је за клизач h , што значи да се померањем клизача h мења прираштај аргумента и тиме постиже визуализација првог извода у тачки. Тачки $F(c, l)$ је укључен траг, тако да се променом аргумента, c , тачке F , помоћу клизача c , она помера по правој линији која у зависности од клизача h , односно прираштаја аргумента, представља бољу или лошију апроксимацију графика првог извода дате функције, $f(x) = x^2$.

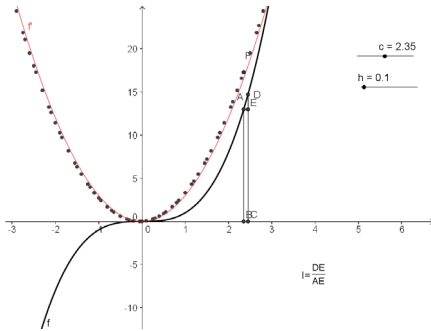
На Слици 2. приказан је „приближан” график првог извода дате функције, за $h = 0.4$, помоћу тачкица, као и график функције $f'(x) = 2x$, односно график првог извода, који дат пуном линијом. Променом вредности h , помоћу клизача, мења се и одстојање „приближног” графика извода од тачног.



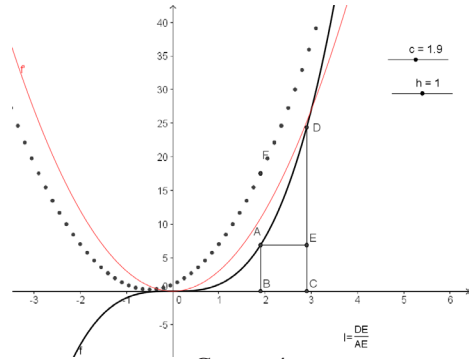
Слика 2.

На Сликама 3. и 4. приказани су тачкицама „приближни“ графици првог извода функције $h(x) = x^3$, за је $h = 0.1$ и $h = 1$, као и графици функције h' . Очигледна је сада и позната чињеница да мања вредност h , даје „бољу апроксимацију“ првог извода функције. Померањем клизача h , се визуално приказује дефиниција првог извода у било којој фиксираној тачки, што се једноставно приказује помоћу *GeoGebra*. Са ученицима свакако треба и то урадити, јер је веома једноставно и указује на разлику између извода функције у тачки и изводне функције.

Напоменимо, да се у овом случају, није могуће извршити померање криве одређене тачкицама ка графику првог извода функције, што је било урађено у радовима [10] и [11], где смо приказали визуализацију граничне вредности количника прираштаја функције и прираштаја, као функцију две променљиве.



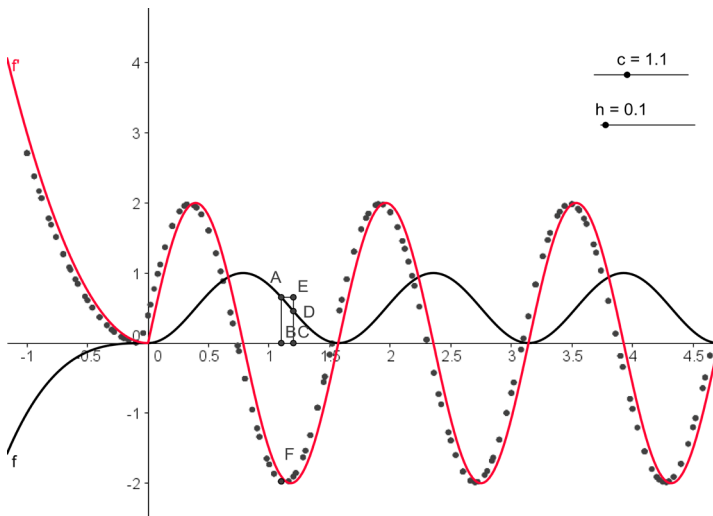
Слика 3.



Слика 4.

Приказани поступак се даље веома једноставно примењује и на друге различите функције. На Слици 5. приказан је један „приближан” график изводне функције, која је дата по деловима,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sin 2x, & x > 0 \end{cases}, \text{ за } h = 0.1.$$



Слика 5.

Сматрамо да се визуализација приказана у овом делу може користити и приликом обраде теореме која повезује прираштаје функције и аргумента са првим изводом и увођења појма диференцијала функције једне реалне променљиве.

Теорема: Функција f је диференцијабилна у тачки $c \in [a, b]$ ако постоји линеарно присликавање $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такво да важи

$$\Delta f = f(c+h) - f(c) = f'(c)h + \omega(h)h, \quad (1)$$

где ω има особину да $\omega(h) \rightarrow 0$ када $h \rightarrow 0$.

Ученицима и студентима теба повезати релацију (1), са различитим примерима, односно визуално показати да функција ω , представља одступање „приближног” графика од тачног графика изводне функције дате функције.

Приказани поступак визуализације се може врло једноставно одрадити, коришћењем програмског пакета *GeoGebra*, коришћењем само два клизача и укључивањем трага.

Литература

- D. Tall, *Comments on the Difficulties and Validity of Various Approaches to the Calculus for the Learning of Mathematics*, (1981) 2, 2 16-21.
- D. Tall, A. Vinner, *Concept Image and Concept Definition Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*, Education Studies in Mathematics, 12, 159-169, 1981.
- D. Tall, *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof*, in Grouws D. A., Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, 495-511, 1991.
- D. Tall, *Recent Developments in the Use of Computer to Visualize and Symbolize Calculus Concepts*, The Laboratory Approach to Teaching Calculus, M.A.A. Notes, Vol. 20, 15-25, 1991.
- Ђ. Такачи, А. Такачи, А. Такачи, *Елементи више математике*, Симбол, Нови Сад, 2008.
- Такачи Ђ., Пешић Д., Милутиновић М., *Усвајање појма непрекидности функције*, Педагошка стварност, VI, 5-6, Нови Сад (2005), 387-397.
- Такачи, Ђ, Пешић, Д., *Непрекидност у настави математике – метод визуализације*, Настава математике, Београд, 49, 3-4 (2003), 31-42.
- Такачи, Ђ., Самарџијевић М., *Визуални приступ дефиницији извода функције*, Настава математике, LI, 1-2, Београд (2006), 19-28.
- Каршаи, Ј., Такачи, Ђ., Такачи, А., Радовановић, Ј., *Визуализација извода функције помоћу програмског пакета Mathematica 6*, примљен за Зборник радова 12. Конгреса математичара Србије.

Ђурђица Такач, Јасминка Радовановић, Нови Сад

VISUALISING DERIVATIVE OF A FUNCTION

Summary

The article presents visualising derivative of a function, according to geometric interpretation of the first derivative of a function, as well as marginal values of quotient increment, using dynamic features of software package GeoGebra.

Джурджица Такачи, Ясмина Радованович, Новый Сад

О ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Резюме

В настоящей работе показана визуализация производной функции на основании геометрического толкования первого вывода функции и предельного значения частного роста, используя динамические характеристики программного пакета Geogebra.

Др Љиљана Петковић
Машински факултет, Ниш
Др Миодраг Петковић
Електронски факултет, Ниш

UDK 371.3::51
UDK 51(091)
Стручни чланак
Примљен: 25. XII 2009.
BIBLID 0553–4569, 55 (2009), 9–10, p. 1007–1017

О ПОГРЕШНИМ НАЗИВИМА ПОЗНАТИХ МАТЕМАТИЧКИХ РЕЗУЛТАТА

Резиме

У математици, као и у другим научним дисциплинама, повремено долази до појаве грешака у приписивању неког математичког резултата научнику који није његов аутор. Циљ овог рада је кратак преглед неких добро познатих математичких резултата и теорема за које се зна да носе погрешан назив. Мада овакав преглед није коначан, он представља допринос у циљу проширења и допуне већ постојећих листа нетачно приписаних или недовољно признатих математичких резултата, а које су објављене у научним часописима. Мада ова област припада више историји математике него настави, већина приказаног материјала може се корисно употребити као занимљива допуна лекција из математике.

Кључне речи: историја математике, називи математичких резултата

Увод

Мада математика важи за врло екзактну науку, и она пати од неких несавршености; није се тако ретко догађало да неко славно откриће буде погрешно приписано неком математичару иако је прави аутор неко сасвим други. Разлози за ово су различити. Грешке су најчешће биле последица „зуба времена“ када се догађало да неки резултати буду заборављени, понекад вековима. Недостатак штампаног материјала (књига, часописа) и комуникације пре више векова узроковао је чињеницу да су многи резултати откривани независно од стране више математичара. С обзиром на ретко објављивање научних резултата и њихову спорадичну презентацију другим научницима, није необично што су математичари и други научници долазили до скоро истоветних открића независно један од другог. Ово се посебно односи на математику старих цивилизација (у Индији, Персији и Азији) чија су достигнућа релативно скоро откривена и још увек се откривају.

Има случајева неких чувених математичких открића која су запамћена по именима оних математичара који су их успешно популарисали (често у добрим

уџбеницима) иако нису били њихови аутори. Они су, у најбољем случају, само дали нека побољшања. С обзиром на реткост добрих књига у прошлости и непостојање стандарда ауторских права, то није изненађујуће.

Данас истраживачи објављују своје нове резултате у најкраћем могућем року да би обезбедили ауторска права. Академски живот је, међутим, изгледао сасвим другачије пре 300–400 година. Истраживачи често нису објављивали, нити јавно саопштавали своја највећа открића, што данас изгледа врло чудно. Пре више столећа у случају открића новог метода за решавање неког проблема, осим универзитетског положаја аутор је добијао знатан износ новца да чува то откриће у тајности. Последица ове праксе била су безбројна оспоравања у погледу приоритета проналазака.

Даље потешкоће у утврђивању стварног приоритета неких математичких резултата произашле су из обичаја неких математичара да, више или мање смишљено, занемаре резултате других математичара. Чак су неки од највећих математичара изостављали да цитирају радове легитимних претходника или да на одговарајући начин одају признање правим ауторима (видети, на пример, [12]).

Историчари математике покушавају да исправе поменуте пропусте и одају признање правим ауторима, мада је то тежак задатак који вероватно никада неће бити завршен на сасвим задовољавајући начин. У овом раду понуђен је преглед неких изабраних добро познатих математичких резултата који носе погрешна или вероватно погрешна имена.

Када је откривен Херонов метод?

Приближно 2000 година пре Херона. Класичан метод за налажење квадратног корена позитивног броја углавном се приписује Херону из Александрије, који је живео у првом или другом веку наше ере. Вавилонска плоча из Јејл колекције (бр. 7289), стара скоро 4000 година, међутим, показује да су вавилонски математичари располагали вештином развоја алгоритамских процедура. Једна од њихових најпознатијих процедура је налажење квадратног корена, која је описана детаљно у књизи Бојера *Историја математике* [4, стр. 31].

Ко је открио Крамерово правило?

Колин Маклорен (Colin Maclaurin, 1696–1746). Швајцарски математичар Габријел Крамер (Gabriel Cramer, 1704–1752) уврстио је овај резултат, који се односи на коришћење детерминанти при решавању система линеарних једначина, у своју књигу *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques* написану 1750. Маклорен је, међутим, добио овај резултат још 1729, што је објављено касније у његовој постхумно издатој књизи *Студија о алгебри у три дела* (Treatise on Algebra in Three Parts) из 1748. Више детаља у вези са приоритетом овог метода може се наћи у [5] и [8, стр. 64].

Када је метод познат као Гаусова елиминација за решавање система линеарних једначина први пут објављен?

Око 1800 година пре Гауса. Мада је Карл Фридрих Гаус (Gauss, 1777–1855) самостално развио овај метод, он је био познат много раније у Кини и објављен је око трећег века наше ере. Дело *Jui Zhang Suanshu* (Девет књига математичких вештина) садржи системе линеарних једначина. Штавише, кинески математичари применили су модеран матрични приступ не само на системе линеарних једначина, већ и на једначине вишег реда и нелинеарне системе користећи притом неке технике које подсећају на методе које је развио Силвестер у 19. веку.

Када је први пут објављен метод познат као Хорнеров метод за решавање алгебарских једначина?

Кинески математичари развили су овај метод неких 600 година пре Хорнера. Вилијам Џорџ Хорнер (William George Horner, 1786–1837) објавио је резултат који носи његово име у *Philosophical Transactions of the Royal Society* 1819. године. Неколико година раније (1804) италијански математичар Паоло Руфини (Paolo Ruffini, 1765–1822) описао је сличан поступак који му је донео златну медаљу Италијанског математичког научног друштва за побољшање метода за нумеричко решавање једначина. Ни Руфини ни Хорнер, међутим, нису први открили овај метод јер га је још средином 11. века описао кинески математичар Јиа Хсиан. До средине 13. века овај метод „вађења корена поновљеним множењем“ већ је био уопштен за решавање једначина произвољног степена у *Математичкој расправи* коју је написао Кин Јуишао. Више детаља може се наћи у књигама Каца [8, стр. 204-210] и Кејџорија [6, стр. 74-75].

Како је Лопитал добио правило које носи његово име?

Купио га је од другог математичара! Име Лопитала данас је највише повезано са такозваним Лопиталовим правилом, које се појавило у његовој књизи *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Анализа бесконачно малих за испитивање кривих) из 1692. године, а која је представљала први уџбеник из диференцијалног рачуна. При писању ове књиге Лопитал је користио предавања свог учитеља Јохана Бернулија (1667–1748). Штавише, правило је заправо проналазак Бернулија, који је Лопиталу продао ексклузивна права на своје откриће. Ово је први познат случај куповине научног открића.

Да ли је Паскал открио Паскалов троугао?

Да, али није био први, само га је поново открио. Математичар и филозоф Блез Паскал (1623–1662) описао је чувену троугаону шему бројева у свом раду *Traité de triangle arithmétique* (Трактат о аритметичком троуглу). Ова шема је,

међутим, била позната кинеским и арапским математичарима вековима раније (видети [11]). Троугао се појавио у радовима ал-Самавала у раном једанаестом веку и Јиа Хсиана средином истог века. Паскалов троугао се први пут појавио у штампаном облику у Европи 1527. године на насловној страни књиге немачког математичара Петруса Апаниуса из Инголштата, више од једног века пре него што је Паскал истраживао његове особине. Напоменимо да су Паскалов троугао у различитим облицима разматрали, такође, Камал-ал-Ду ал-Фариси (око 1300), Штифел (1544), Шибел (1545), Пелетје (1549), Тартаља (1556), Бомбели (1572), Оутред (1631).

Ко је први проучавао Пелову једначину?

Француски математичар Жозеф Луј Лагранж (1736–1813). Једна од најпознатијих неодређених квадратних једначина (са решењима у скупу рационалних бројева) има облик

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

Овај тип једначина грешком је назван по Енглезу Џону Пелу (John Pell, 1611-1685) који се бавио теоријом бројева. Грешка је настала у раду Ојлера из 1732/33. Чињеница је, међутим, да Пел није имао никакве везе с овим једначинама. Ојлер је разматрао целобројна решења ове једначине и демонстрирао метод за појединачне случајеве. Доказ егзистенције решења за произвољно A дао је француски математичар Лагранж 1766. године и објавио га у додатку каснијег издања своје књиге *Алгебра*.

Када је откривена Питагорина теорема?

Одговор на ово питање још увек је неодређен, мада изгледа да је неколико цивилизација могло открити ову теорему независно. Иако се ова чувена теорема углавном приписује старогрчком математичару и мистичару Питагори (шести век пре нове ере), најстарији сачуван доказ је Еуклидов (трећи век пре нове ере), мада легенда каже да је и Питагора поседовао доказ. Вавилонска плочица Плимтон 322 (око 1700. пре нове ере) садржи дугу листу Питагориних тројки, наводећи многе историчаре да верују да су Вавилонци знали за теорему. Теорема је, такође, била позната и у Кини и Индији, вероватно пре Питагориног времена. Супротно распрострањеном мишљењу, нема доказа да је теорема била позната у старом Египту.

Ко је први публиковао Симпсоново правило?

Џејмс Грегори (James Gregory, 1638-1675). Симпсоново правило појавило се 1743. у *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, Томаса Симпсона (1710-1761). Он је дао метод за приближно израчунавање површина равних фигура коришћењем параболичног лука. Грегори, међутим, има

приоритет над овим резултатом јер га је објавио 1688. у свом делу *Exercitationes geometricae* у нешто другачијем облику.

Ко је био творац Тејлоровог реда?

Поново Џејмс Грегори. Године 1715. Брук Тејлор (Brook Taylor, 1685-1731) је у *Methodus incrementorum* објавио формулу која носи његово име и која у модерној нотацији гласи

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots$$

Грегори је, међутим, знао за овај ред три деценије раније, мада је по свему судећи његова прелиминарна форма била у Индији пре 1550. (видети [8] и [13]). Први строг доказ конвергенције Тејлоровог реда извео је Огистен Коши један век касније.

Ко је први увео Бернулијеве бројеве?

Јапански математичар Такаказу Секи Кова (1642–1708). Највећи јапански математичар у 17. веку Такаказу Секи Кова разматрао је у својој књизи *Katsuyo Sampo* суме степена

$$S_1 = 1 + 2 + \dots + n, S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2, \dots$$

и дошао до следећих бројева (видети Јосидину књигу [18]):

$$K_0 = 1, K_1 = -\frac{1}{2}, K_2 = \frac{1}{6}, K_3 = 0, K_4 = -\frac{1}{30}, K_5 = 0, K_6 = \frac{1}{42}$$

Ови бројеви данас су познати као „Бернулијеви бројеви“ по чувеном швајцарском математичару Јакобу Бернулију (Jacob Bernoulli, 1654-1705), који их је разматрао у свом делу *Ars Conjectandi* (Вештина предвиђања, 1713).

Ко је први радио с детерминантама да би решио систем линеарних једначина?

Поново Такаказу Секи Кова. Иако су Кинези имали неке представе и идеје о детерминантама, Секи је био прва особа која је изучавала детерминанте и применила их на решавање неких специјалних система линеарних једначина нешто пре 1683, видети [9]. Десет година касније Готфрид Лајбниц (Gottfried Leibniz, 1646–1716) је, независно, користио детерминанте за решавање система линеарних једначина. Лаплас је показао да детерминанта која има две идентичне врсте (колоне) има вредност 0. Коши је у свом раду из 1812. увео називе „детерминанта“ и „минор“. Он је први показао да се детерминанта може израчунати развијањем преко елемената било које врсте или колоне.

Ко је аутор Стирлингове формуле?

Абрахам де Муавр (1667–1754). Стирлингова формула $n! \approx n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}$ погрешно је приписана Џејмсу Стирлингу (1692–1770). Она се најпре појавила 1730. у књизи *Miscellanea Analytica* коју је написао француски математичар Абрахам де Муавр. Де Муавр је употребио ову формулу 1733. да изведе нормалну криву као апроксимацију бинома. У другом издању књиге 1738. године, де Муавр је одао признање Стирлингу за побољшање формуле које гласи:

$$n! \approx n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} + \dots \right).$$

Да ли је Ојлер први нашао суму реда реципрочних квадрата?

Вероватно, али постоје контроверзе око приоритета. Неки историчари математике тврде да је Јохан Бернули (1667–1748) био први. У своје сабране радове публиковане 1742, Јохан Бернули, бивши Ојлеров учитељ, укључио је следећу добро познату формулу:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Овај резултат је, међутим, опште познат као Ојлеров допринос иако је Ојлер дао ову формулу (у штампаном облику) шест година касније у свом чувеном раду *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) у коме није поменуо Јохана Бернулија. Тачно је да је Ојлер објавио свој резултат после Јохана Бернулија, али је скоро сигурно да је он дошао до овог резултата око 1736. и одмах га саопштио Јохановом сину Данијелу Бернулију, такође познатом математичару (видети [14]). Више детаља може се наћи у књизи Бојера [4, стр. 487].

Ко је први извео Бинеову формулу за Фибоначијеве бројеве?

Абрахам де Муавр. Фибоначијев низ $\{F_n\}$ је дефинисан са $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и рекурентном релацијом

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ за } n \geq 3.$$

Првих неколико чланова је: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Експлицитна формула за n -ти члан дата са

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

у литератури се најчешће приписује француском математичару Жаку Бинеу (Jacques

Binet, 1786–1856). Међутим, де Муавр је први извео горњу формулу за општи члан Фибоначијевог низа.

Да ли је Маскерони открио Маскеронијеву конструкцију?

Да, али није био први. Лоренцо Маскерони (Lorenzo Mascheroni, 1750–1800), италијански математичар и песник, написао је своју чувену књигу *Geometria del compasso* (Геометрија помоћу шестара, 1797) у стиховима и посветио је Наполеону. Маскерони је показао да су све Еуклидске конструкције изводљиве лењиром и шестаром, такође изводљиви само шестаром. Ово је, међутим, већ био доказао 125 година пре Маскеронија мало познати дански математичар Георг Мор (1640–1697) у својој књизи *Euclides danices* из 1672.

Да ли је Мебијус први открио Мебијусову траку?

Не, првенство открића неоријентисане површи, познате као Мебијусова трака, припада Јохану Листингу (1808–1882), и према датуму објављивања и према датуму открића. Радећи на неким проблемима у геометријској теорији полиедара, Аугуст Фердинанд Мебијус (Möbius, 1790–1868) је 1858. године открио и дискутовао особине дводимензионалне неоријентисане површи (често погрешно називане једностраном површи). Листинг је дошао до свог открића скоро у исто време и независно од Мебијуса, али је објавио свој резултат 1861, четири године пре Мебијуса.

Ко је извео Карданову формулу за кубну једначину?

Шипионе дел Феро (Scipione del Ferro, 1465–1526), професор на Универзитету у Болоњи, али никада није објавио свој метод за решавање кубне једначине помоћу радикала и само је веома блиским пријатељима саопштио своје откриће (према [2] и [3]). Венецијански мајстор рачуна Николо Фонтана (1500–1557), познатији по надимку Тартаља (што значи „муцавац“), независно је открио ову формулу 1535. и чувао је као врхунску тајну много година. Међутим, Ђироламо Кардано (Gerolamo Cardano, 1501–1576), доктор медицине, математичар, физичар и коцкар из Милана, дошавши до сазнања да Тартаља није први открио овај метод, уврстио га је у своју чувену књигу *Artis magnaе sive de regulis algebraicis liber unus* или скраћено *Ars magna* (Велика вештина) објављену 1545. године. У тој књизи дел Феру и Тартаљи у потпуности су признате заслуге за њихова открића (видети књигу Стројка [16, стр. 112–113]). Испоставило се да је Карданов допринос популаризацији дел Ферове и Тартаљине формуле био тако велики да је она остала упамћена под Кардановим именом.

Да ли је Ојлер формулисао чувену формулу за комплексне бројеве?

Да, али ова формула је претходно била позната британском математичару Роџеру Коутсу (Roger Cotes, 1682–1716). Коутс је у *Philosophical Transactions* из 1714. (поново публикована као *Harmonia mensurarum* (1722)) извео формулу $\log(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i\varphi$, чији је еквивалент чувена формула:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

која носи Ојлерово име. Јохан Бернули (1667–1748) је, такође, знао за горњу формулу. Ојлер је формулисао своју формулу 1748. у свом раду *Introductio in analysin infinitorum*

(Увод у анализу бесконачних величина) и, мада формула није била нова, његово коришћење симбола i као ознаке за $\sqrt{-1}$ био је користан допринос.

Ко је био аутор Бернулијеве неједнакости?

Енглески математичар Исак Бароу (Isaac Barrow, 1630–1677). Добро позната „Бернулијева неједнакост“

$$1 + x^n \leq 1 + nx$$

где је x реалан број већи од -1 и n цео број ≥ 1 , са једнакошћу само за $x = 0$, најчешће се приписује великом швајцарском математичару Јакобу Бернулију (Jacob Bernoulli, 1654–1705). Он је разматрао ову неједнакост у свом првом раду о бесконачним низовима 1689. Енглески математичар Исак Бароу користио је, међутим, ову неједнакост још раније у седмој лекцији своје књиге *Lectiones geometriae*, објављеној 1670. године. Интересантно је напоменути да је Исак Њутн, који је касније наследио Бароуа у Кембриџу, значајно помогао при издавању ове књиге.

Да ли Гаус први представио комплексне бројеве у Гаусовој равни?

Не, норвешки математичар Гаспар Весел је био први, годину дана пре Гауса. Доказ фундаменталне теореме алгебре, која тврди да сваки алгебарски полином има бар једну нулу, дат је у Гаусовој Хелмштетској докторској дисертацији из 1798. (одбрањеној 1798, а објављеној 1799). Овај доказ је изведен коришћењем неких геометријских конструкција у којима су реални и имагинарни делови комплексног броја $z = a + b$ представљени као координате тачке у равни у правоугаоном координатном систему.

Годину дана пре Гауса, Гаспар Весел (Caspar Wessel, 1745–1818) је открио графичку репрезентацију комплексних бројева и објавио своје откриће у научном часопису *On the analytical representation of direction*, који математичарима није био много доступан, видети [1, стр. 177] и [15, стр. 55–66]. Овај Веселов допринос остао је непримећен и данас се раван комплексних бројева обично зове Гаусова раван иако је Гаус објавио свој геометријски приказ тридесетак година касније [8, стр. 737–738]. Иста судбина задесила је швајцарског књиговођу Жана Робера Аргана (Jean-Robert Argand, 1768–1822), који је независно дошао до сличне геометријске интерпретације комплексних бројева и то објавио у малој књизи из 1806. Термин „Арганов дијаграм“ може се наћи у неким старим радовима.

Да ли је Ојлер формулисао формулу за конвексне полиедре?

Да, али по свему судећи није био први. Према неким ауторима, добро познату формулу:

$$v - e + f = 2 \quad (1)$$

у теорији графова и правилних полиедара први је формулисао француски математичар Рене Декарт (Rene Descartes, 1596-1650) око 1635. године за пет правилних полиедара, где v , e и f означавају број темена, ивица и страна полиедра, видети [4, стр. 370], [7, стр. 286]. Ова интересантна формула важи и за сваки конвексан (или још општије, сваки *просто-повезан*) полиедар. Други еминентни историчари тврде да је Декарт добио израз за збир углова свих страница полиедра, из кога може бити изведена формула (1), али да он саму формулу никад није извео.

Формула (1) појавила се у овом облику у Ојлеровом писму немачком математичару Кристијану Голдбаху, који се бавио теоријом бројева, новембра 1750. Према историјским белешкама из [17, стр. 228], Ојлер у то време није био у стању да докаже ову формулу али је две године касније извео доказ. Нажалост, Ојлеров доказ је био неисправан. Исправан доказ за полиедре дао је 1794. А. М. Лежандр. Одговарајућу формулу за графове нацртане у равни први је извео Огистен Коши 1813. у свом раду *Recherches sur les polyèdres* (Истраживања о полиедрима).

Литература

- E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, New York-London, 1945.
- E. Bortoletti, L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI, *Periodico di Matematica*, **5** (1925), 147-184.
- Bourbaki, *Elements of the History of Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1994, p. 72.
- C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1968. Boyer, p. 31.
- C. B. Boyer, Colin Maclaurin and Cramer's rule, *Scripta Mathematica*, **27** (1966), 377-379.
- F. Cajori, *A History of Mathematics*, 5th ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island 2000.
- H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston (3th edition), New York 1969.
- V. J. Katz, *A History of Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1998.
- Y. Mikami, On the Japanese theory of determinants, *Isis*, **2** (1914), 9-36.
- T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, Dover Publications, New York 1960.

- J. Needham, *Science and Civilization in China*, Vol. III, Cambridge University Press, Cambridge 1953.
- C. T. Rajopagal, T. V. Vedamurthi, On the Hindu proof of Gregory's series, *Scripta Mathematica*, **15** (1951), 65-74.
- V. V. Rahman, The D'Alembert-Euler rivalry, *The Mathematical Intelligencer*, **7** (1985), 35-41.
- P. Staedel, Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen, *Biblioteca Mathematica*, **8** (1907-1908), 37-60.
- D. Smith, *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications, New York 1959, pp. 55-66.
- D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, G. Bell and Sons, London 1956.
- R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Graphs: An Introductory approach*, John Wiley and Sons, Inc. New York 1990, p. 220.
- K. Yosida, A brief biography of Takakazu Seki, *The Mathematical Intelligencer*, **3** (1981), 121-122.

Ljiljana Petković, Ph. D., Miodrag Petković, Ph. D., Niš

ABOUT WRONG NAMES OF RENOWN MATHEMATICAL RESULTS

Summary

In mathematics as well as in other scientific disciplines, occasionally occurs a mistake in linking some impressive mathematical results with a scientist who should not be held accountable for it. The objective of the article is a short review of some renowned mathematical results and theorems which were named incorrectly. Although the list is not final, it contributes to further supplement of current record of mistaken authors or insufficiently recognized mathematical results published in scientific journals. However, this field of research belongs to the history of mathematics, not teaching activity. Thus, most of the presented data could be usefully applied as an interesting supplement in teaching mathematics.

Key words: history of mathematics, names of mathematical results

Д-р Лиляна Петкович, д-р Миодраг Петкович, Ниш

ОБ ОШИБОЧНЫХ НАЗВАНИЯХ ИЗВЕСТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Резюме

В математике, как и в других научных дисциплинах, временами появляются ошибки происшедшие в приписке некоторого математического результата учёному не являющемуся его автором. Целью настоящей работы является краткий обзор некоторых хорошо известных математических результатов и теорем, для которых широко известно что имеют ошибочное название, имя. Хотя настоящий обзор не является полным и окончательным, он вносит вклад в расширение и пополнение уже существующих списков неточно приписанных или недостаточно признанных результатов, которые уже напечатаны в научных журналах. Несмотря на то, что эта область больше принадлежит истории математики, чем процессу обучения, большую часть показанного материала можно полезно использовать как интересное дополнение на уроках математики.

Опорные слова: история математики, названия математических результатов

МЕТОДА ПОКУШАЈА И ПОГРЕШАКА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Резиме

Многи савремени методичари наставе математике наглашавају водећу улогу стваралачке методе решавања проблема, која омогућује ученику да самостално изграђује моделе решавања истих. Чињеница је, да у почетној настави математике има мало примера који се могу решавати помоћу класичних математичких метода и модела (који на том узрасту још нису ни формиран), па се зато решавању многих проблема прилази креативно, на основу оригиналних, па и необичних начина решавања. Овај приступ решавању проблема претпоставља вођење математичког образовања, који респектује кибернетичко гледање на наставу, као управљив процес и подразумева примену кибернетичких наставних метода. На овом нивоу образовања од кибернетичких метода издваја се метода „покушаја и погрешака“.

Метода покушаја и погрешака састоји се у томе да се начине случајни покушаји, како би се решио неки проблем. Пут до решења је усмерен, „хипотезе“ се стално проверавају. Погрешни покушаји се коригују или одбацују, а добри се даље разрађују. Дакле ова метода имплицира и методу „лажне претпоставке“, па би је условно могли назвати и методом „хипотезе“.

Метода хипотезе се већ примењује у почетној настави математике, посебно у сфери нижих нивоа репрезентација (конкретни и иконички ниво). Поред класичних садржаја почетне наставе математике, елементи логике, комбинаторике, геометријски проблеми, па и проблеми вероватноће представљају право проширење области примене интуитивног решавања проблема, кроз игру, методом покушаја и погрешака, односно методом хипотезе.

Овај рад се бави приступом решавања веома суптилних проблема почетне наставе математике. У недостатку неопходне апаратуре за решавањем једначина, неједначина, проблема комбинаторне природе и сл. неопходно је коришћење креативнијих метода и техника. Ове идеје и методе многим ће остати, као једине за решавање одређене групе проблема, јер их никад неће издићи на апстрактни ниво.

Кључне речи: решавање проблема, кибернетичке методе, метода покушаја и погрешака

Решавање задатака и решавања проблема као методски облик у настави математике

Решавање задатака, као методски облик, према В. Пенавину (*Велимир Пенавин, 1971*), је специфичан за математику, њена грађа и начин усвајања математичких садржаја, метода и техника изискује његово постојање. Под решавањем задатка подразумева се долажење до непознатих података применом познатих чињеница, алгоритама и метода, дакле на основу репродуктивног мишљења.

У овом случају доминира алгоритамско и конвергентно мишљење, које обезбеђује решавање оних „проблема“ код којих свака неопходна чињеница и сваки корак долажења до резултата су познати.

Методичка вредност и целисходност решавања задатака одређена је на следећи начин:

- Утврђивање стечених знања, формирање умења и навика,
- Стицање одређене технике рада,
- Развијање инвентивности,
- Развијање мишљења,
- Развијање прецизности, уредности, тачности, самосталности итд.

Познати методичар наставе математике Г. Поља (*Pólya György, 1968*) на питање, како решавати математички задатак, даје следећи алгоритам:

- Разумевање задатка,
- Стварање плана,
- Извршавање плана,
- Осврт.

Метода *решавања проблема* је већ, такође, дуго у центру пажње методичара наставе математике, пре свега због тога што решавање проблема уопште, а посебно на бази креативности, представља највише домете наставе математике. Код решавања проблема неопходна су нова знања, нове методе, односно нове комбинације постојећих знања. Ниво препознавања, репродукције, чак и разумевања математичких појмова и релација може да се оствари класичним методама, методским облицима, методским појединостима, односно наставним логичким поступцима, међутим стицање виших нивоа знања (примена и креативно знање), просто су неостварљиви на класичан начин.

Многи савремени методичари наставе математике наглашавају водећу улогу *стваралачке методе решавања проблема*, која омогућује ученику да самостално изграђује modele решавања истих.

У почетној настави математике има мало примера који се могу решавати помоћу класичних математичких метода и модела (јер они, у најбољем случају, тек су у фази формирања). Зато се решавању проблема на том нивоу образовања ваља прићи креативно, на основу оригиналних, па и необичних начина решавања. Пошто је начин решавања проблема углавном непознат, неопходно је генерисати више идеја, анализирати их, кориговати, прилагодити условима датог проблема,

да би се дошло до завољавајућег решења. Све то подразумева инвентивност и креативност у раду, како ученика тако и наставника.

Метода покушаја и погрешака у почетној настави математике

Решавање проблема, посебно у почетној настави математике претпоставља и вођење математичког образовања, који респектује кибернетичко гледање на наставу, као управљив процес и подразумева примену кибернетичких наставних метода (*Gerhard Meyer, 1956*).

Кибернетика је синтеза разних научних подручја, због тога користи и многе методе других наука, а и такве које имају специфично кибернетско обележје. Све те методе заснивају се на општим методама мишљења. Формирање и решавање строгих математичких модела немогуће је у почетној настави математике, али идеје једнакости, или неједнакости са непознатом, комбинаторике, вероватноће, статистике и сл. корисно је и могуће примењивати на решавање конкретних проблема. Многи ученици неће никад достићи формални, апстрактни ниво решавања неких проблема, али одговарајуће идеје могу им се послужити да схвате и разреше одређене животне ситуације.

Од *методе кибернетике* у почетној настави математике издваја се: *метода покушаја и погрешака*, која афирмише истраживачки дух, креативност и снижава степен апстрактности математичких појмова. Ова метода се састоји у томе да се проблем конкретизује, чинећи случајне покушаје решења проблема, како би се испитао неки предмет, појава, или систем. Пут до решења је усмерен и нелогична решења се у старту одбацују. Погрешке се анализирају и на основу тога се формира одговарајућа хипотеза, која се стално проверава. Негативни резултати се коригују или одбацују, а позитивни се даље разрађују.

Код решавања неких проблема процена резултата игра значајну улогу. На овом нивоу образовања може се говорити углавном о резултатима *a posteriori*, док су знања *a priori* веома ограниченог обима. Конкретне и иконичке репрезентације математичких знања на овом узрасту деце то подразумева. Код решавања других проблема од деце се захтева само генерисање конкретних примера датог појма или препознавање њене менталне слике. Метода покушаја имплиците садржи и ове аспекте решавања проблема у почетној настави математике. Тако, на пример, неки проблем комбинаторне природе може се решити систематским покушајима (распоредом или избором датих конкретних елемената), неки проблем са непознатом, симулацијом за одређене вредности параметара и непознатих итд. Коначно на тај, индуктиван начин (не математичком индукцијом, дакле без посебног доказа) долази се и до одговарајућих математичких модела за решавање сличних проблема (који имају исти математички модел).

Примери примене методе покушаја и погрешака

1. Пример: Ана, Маја и Нада су сестре. Ана није најмлађа и Маја је старија од Ане. Поређај сестре по старости од најстарије до најмлађе.

а) Метода покушаја може да се базира на комбинаторним способностима ученика, на нивоу „манипулација“ словима.

Неке могућности поређења сестара, односно слова А, М и Н су:

А, М, Н

А, Н, М

М, А, Н

М, Н, А

Н, А, М, и тако даље (преостао је још само редослед: Н, А, М).

Претпоставимо, да редослед: А, Н, М задовољава тражене услове.

– Ана није на последњем месту, дакле није најмлађа,

– Пошто је Маја последња, дакле најмлађа, то значи да не може бити старија од Ане, што је у супротности са условом задатка.

Дакле ова претпоставка је погрешна.

Покушајмо са следећим редоследом: М, А, Н.

– Ана није последња, дакле није најмлађа.

– Маја се налази пред Аном, што значи да је старија од Ане.

Дакле овај распоред испуњава све захтеве проблема.

Према томе тражени редослед сестара је: Маја, Ана и Нада.

Може се поставити и питање, да ли је овај редослед једини који испуњава тражене захтеве и наставити са „покушајима“. Односно, постоји могућност да се међу предвиђеним покушајима не налази тражено решење. У овом случају треба наставити са тражењем могућности. На тај начин ћемо или доћи до решења проблема, или ћемо констатовати да га нисмо нашли.

б) Логичност у решавању овог проблема усмерава и знатно упрошћава саму технику решавања.

– Из услова, да Ана није најмлађа, дакле није на последњем месту, следи да је Ана на првом или другом месту.

– Како је Маја старија од Ане, следи да се Маја налази испред Ане, односно да је тражени редослед: Маја, Ана и Нада.

2. Пример: У једном дворишту налазе се фазани и зечеви. Укупно имају 25 глава и 80 ногу. Колико има фазана, а колико зечева у том дворишту?

Дати проблем се углавном покушава решавати методом једначина (формално није ни у програму). Формирање једначине (или “система једначина”) можда ће још и успети на овом нивоу образовања, али решавање добијене једначине (једнакост са непознатом) наилази на непремостиве потешкоће.

На нивоу нижих разреда основне школе овај проблем се може решити *методом покушаја и погрешака, односно методом „лажне претпоставке“*. Претпоставимо да се у дворишту налази: 2 фазана и 23 зечева (произволна комбинација).

Хипотеза није апсурдна, јер очигледно није у супротности са укупним бројем посматраних животиња у том дворишту – број глава је 25.

Провери ћемо, да ли претпоставка испуњава и други услов проблема.

Укупан број ногу, у овом случају би било:

$$2 \cdot 2 + 23 \cdot 4 = 96$$

Према услову задатка, број ногу треба да је 80, што значи да је претпоставка била погрешна, наиме имамо 16 ногу више.

Ако би заменили једног зеца са једним фазаном, смањили би број ногу за два. Ако би то урадили $16 : 2 = 8$ пута, број ногу би смањили за 16.

Што значи да број фазана треба повећати за 8, а број зечева смањити за осам.

Дакле, број фазана је $2 + 8 = 10$, а број зечева је $23 - 8 = 15$.

3. Пример: Одредити непознати број (у скупу N) у једнакости $2x - 5 = 7$.

(Формулација: „решити једначину“ $2x - 5 = 7$, само условно би могла да буде у духу важећег Наставног плана и програма у Републици Србији)

У нижим разредима основне школе једначине се не решавају на класичан начин. Идентичне трансформације једначина („једнакости са непознатом“) се не изучавају.

Метода решавања једначина на нивоу нижих разреда основне школе се заснива се на коришћењу таблице сабирања и одузимања, множења и дељења, односно дефиниција рачунских операција, а у сложенијим случајевима на примени табела, која методом покушаја и погрешака води до решења.

Дати задатак: $2x - 5 = 7$, помоћу табеле – методом покушаја и погрешака решава се на следећи начин:

Пре свега, решење се тражи у скупу природних бројева.

Ученик треба да изврши једну процену непознате, да би дата разлика износила око седам.

Ако би x био нпр.: 5, разлика би износила 5. Према томе умањеник треба мало повећати.

Нека је $x = 6$, добија се да је разлика баш 7. Да смо узели да је $x = 7$, разлика би била 9, што такође не одговара захтевима задатка.

У облику талбеле, то изгледа овако:

x	5	6	7
$2x-5$	5	7	9

Дакле, непознати број је: $x = 6$

Закључак

Решавање задатака и проблема, односно примена проблемске методе у почетној настави математике, често се рефлектује кроз методе покушаја и погрешака, која имплицира и методу „лажне претпоставке”, односно методу „*хипотезе*”.

Метода хипотезе се већ примењује у почетној настави математике, посебно у сфери нижих нивоа репрезентација (конкретни и иконички ниво).

У сфери манипулација конкретним предметима (или дидактичким материјалом) и у иконичној равни, ова метода је доминантна. У сфери симболичке репрезентације математичких појмова и релација, ова метода снижава апстрактност решавања проблема (конкретизацијом).

Дакле, може се закључити да интуитивно решавање проблема, кроз игру, методом покушаја и погрешака, односно методом хипотезе, веома успешно се решавају, како класични проблеми почетне наставе математике, као што су једначине и неједначине, тако и проблеми из комбинаторике, геометријски проблеми, па и проблеми вероватноће итд.

Ова метода је конкретнија, претпоставља више креативности у раду и више одговара узрастним особеностима ученика у разредној настави и тиме се повећава ефикасност решавања, па и суптилних проблема на том нивоу образовања.

Литература

- Дејић, М., Егерић, М., Методика наставе математике, Учитељски факултет у Јагодини, 2003.
- Dienes, Z., *Építők fel a matematikát*, Budapest, 1999.
- Крекић, П. В., Савремене методичке трансформације комбинаторике у почетној настави математике, Иновација у настави, Београд, 2006, 2, 37-48.
- Meyer, G., *Kybernetik und Unterrichtsprozess*, Volkseigener Verlag, Berlin, 1956.
- Пенавин, В., Структура и класификација метода у настави аритметике и алгебре, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1971.
- Петровић, Н., Пинтер, Ј., Методика наставе математике, Педагошки факултет, Сомбор, 2006.

Pólya, G., *A problémamegoldás iskolája*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

Пинтер, Ј. (1997): Математичко-кибернетичко моделовање у почетној настави математике, Учитељски факултет, Сомбор,

Zech, F. (1998): *Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, Beltz Verlag – Weinheim und Basel.

Valerija Pinter-Krekić, Ph. D., Subotica

METHODOLOGY OF 'TRIAL AND ERROR' IN EARLY TEACHING MATHEMATICS

Summary

Many contemporary methodologists of teaching mathematics point out the leading role of creative methodology in dealing with problems which enable creating pupil's own models of problem solution. In early teaching mathematics there are only few problems which could be solved by applying classic mathematical methodology and models (which are not fully formulated at this stage of learning), thus, a creative approach based on original and even unusual way of dealing with the problem has been often developed. This kind of approach seeks for carefully monitored mathematical education that recognizes cybernetic reflection towards teaching activity as a procedure that can be closely monitored and includes application of cybernetic teaching methodology. Only 'trial and error' methodology could be singled out at this stage of education.

This methodology is based on random trials and the route towards solution is directed. Hypotheses are examined all the time. Failed attempts are corrected or rejected, but successful ones are elaborated further. Since the methodology implicates the method of 'false assumption', it could be also called 'hypothesis' methodology.

'Hypothesis' methodology is already in use in early teaching mathematics, specially in lower stages of presentation (concrete and iconic level). Besides, common subject-matter of early teaching mathematics, the elements of logic, combination, geometric problems, as well as probability problems represent an improved access to the application of intuitive problem solving through games, using 'trial and error' methodology, i.e. hypothesis methodology.

This article deals with the approach to solving delicate problems of early teaching mathematics. Due to the lack of adequate apparatus for solving equations, inequations, problems of combination, etc. the application of creative teaching methodology is inevitable. These ideas and methods will be the only solution for many pupils, because they will be never raised on an abstract level of thinking.

Key words: solving problems, cybernetic methods, method of trial and error

Д-р Валерия Пинтер Крекич, Суботица

МЕТОД ПОПЫТОК И ОШИБОК В НАЧАЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Резюме

Многие современные методисты обучения математике подчёркивают передовую роль творческого метода решения проблем, который ученику даёт возможность самостоятельно формировать модели решения этих проблем. Важным фактом является то, что в начальном процессе обучения математики есть мало примеров, которые можно решать применяя классические, традиционные математические методы и модели (которые в этом возрасте ещё не сформированы) и поэтому к решению многих проблем мы подходим креативно, на основании оригинальных, иногда и необычных форм решения. Такой подход к решению проблем подразумевает реализацию математического образования, которое имеет в виду кибернетический взгляд на процес обучения, как на процесс которым можно управлять и в котором подразумевается применение кибернетических учебных методов. На настоящем уровне образования из кибернетических методов выделяется метод „попыток и ошибок“.

Метод попыток и ошибок состоит в том что нужно сделать случайные попытки в решении некоторой проблемы. Путь к решению направлен, „гипотезы“ постоянно проверяются. Ошибочные попытки ученики исправляют или отвергают, а хорошие дальше обрабатывают. Это значит что такой метод включает и метод „ложного предположения“, и его можно назвать и методом „гипотезы“.

Метод гипотезы уже применяется в начальном обучении, нарочно в сфере более низких уровней представления (конкретный и образный уровни). Наряду с традиционными содержаниями элементарного, начального обучения математике, элементы логики, комбинаторики, геометрические проблемы и проблемы вероятности, являются настоящим ресширением области применения интуитивного решения проблем, через игру, методом попыток и ошибок, то есть методом гипотезы.

Настоящая работа рассматривает подход к решению очень тонких проблем начального процесса обучения математики. Из-за недостатка нужной аппаратуры для решения уравнений, неравенств, проблем комбинаторного типа и тому подобного, нужно использовать более креативные методы и техники. Эти идеи и методы многим остаются как единственные в решении определённой группы проблем, так как они их никогда не поднимают на абстрактный уровень.

Опорные слова: решение проблем, кибернетические методы, метод попыток и ошибок

ОЦЕНЕ И ПРИКАЗИ

Академик Босилка Ђорђевић
Српска академија образовања
Београд

UDK 655.55

Приказ

Примљен: 18. XI 2009.

BIBLID 0553-4569, 55 (2009), 9-10, p. 1026-1033

МЕТОДОЛОШКИ ПРОБЛЕМИ ИСТРАЖИВАЊА ДАРОВИТОСТИ

У свом дугогодишњем трагању за проналажењем научне методологије у истраживању даровитости, академик др Грозданка Гојков отишла је даље од оног што је до сада проучавала и истраживала. Поред лепе теоријских радова и великог броја истраживања, др Гојков је написала нову, опсежну студију под насловом: „МЕТОДОЛОШКИ ПРОБЛЕМИ ИСТРАЖИВАЊА ДАРОВИТОСТИ“.

Ова студија представља импозантан преглед теоријских схватања и истраживања који су везани за феномен даровитости и креативности. То се најбоље може видети на основу садржаја (тема), обухваћених у овој студији и њиховог темељеног и студиозног разматрања. Истовремено, садржај указује на ширину познавања ове проблематике, на продубљено и критичко сагледавање бројних теорија и схватања, недоумица и заблуда које су присутне међу теоретичарима. Да је др Гојков подробно анализирали и најновије теорије и схватања о сложеним и деликатним питањима даровитости и креативности, најбоље показује импресивна библиографија на крају ове студије.

Студија има 12 поглавља са тридесет једном подтемом, резимеа на немачком и енглеском језику, индекс појмова, индекс имена и библиографију која садржи 884 библиографске јединице на страним језицима, и то од класичних аутора из филозофије, педагогије и психологије, до аутора савремене епохе, посебно постмодерне, па до најновијих.

Није нимало лако ни једноставно приказати студију са овако комплексним и обимним садржајем. Стога смо настојали да тако разуђен садржај условно групишемо у шест целина.

Прва целина односи се на приказивање следећих теорија: теорију хаоса и детерминантности, као основе за проучавање даровитости и стварања стратегија за њихов развој; теорију детерминистичког хаоса као основе за тумачење налаза о претварњу потенцијала у остварење; теорију поља као референтног оквира детерминистичког хаоса на пољу методологије даровитих.

Ове теорије др Гојков детаљно је изложила и анализирали у претходној књизи под насловом: *Дидактика даровитих* (2008). Треба, међутим, нагласити

да су поменуте теорије у овој студији разматране из другог угла и то из оног који се односи на трагање за методологијом која је примерена проучавању даровитости и утврђивању научних доказа у процени њихових истраживачких и емпиријских резултата.

Друга група разматраних питања односи се на даровитост и доказе за стваралачку супериорну перформансу (постигнућа) и обухвата процене у оквиру тог постигнућа и питања која су повезана са овом проценом, као што су: приступ, развојни аспекти и др, као и критеријуме доказа даровитости и високих нивоа постигнућа.

Трећа група питања односи се на концепције о даровитости и таленту, које неминовно намећу бројна питања о томе да ли је даровитост урођена способност и, ако јесте, који су докази за то, или није урођена способност и који докази то потврђују. У овој групи питања изложено је Гањеово схватање, као и схватање других аутора и докази за прву и другу оријентацију у тумачењу природе даровитости. Посебно су разматрани докази за генетско наслеђе не само за општу даровитост, него и за посебне таленте.

Четврта целина је посебно детаљно разрађена и садржи различите доказе за стваралачку супериорну перформансу (постигнућа), као што је процена заснована на експертској перформанси, затим, развојни аспекти експертске и изузетне перформансе, проширење приступа експертској перформанси на креативније области и даровитости и др.

Велика пажња посвећена је петој групи питања, а односи се на процес идентификације. Док су претходна поглавља највећим делом теоријског карактера, део о идентификацији даровитих представља широки преглед теорија и поступака који из њих произлазе, а који се примењују у овој сложеној, деликатној и одговорној области. Одговорној зато што се овим поступком исказују одређена мишљења о даровитој деци и доносе одлуке, које су изузетно важне за њихов будући развој, њихове успехе или неуспехе. Веома су прегледно и детаљно приказане врсте идентификације даровитих, као и сам процес идентификације. Да поменемо само неке од 12 презентираних: фазе идентификовања, модели високих способности, идентификација младих особа, социјално окружење високо способног детета, затим статичке и динамичке процене и др.

Треба нагласити да је у приказивању различитих поступака идентификације даровитих и креативних, др Гојков показа све добре особине научника: објективност, критичност у оцени сваког поступка, што даје одређену сигурност за њихово прихватање, нарочито у погледу узраста испитаника, циља истраживања и утврђивања даровитости. Од та два важна захтева зависи и примерно одабирање и прихватање како поступака тако, нарочито, инструмената за утврђивање даровитости и креативности.

Шеста целина садржи приказ властитог истраживања о утврђивању даровитости предшколске деце са доказима и ограничењима, што поново указује на став аутора да објективно и критички прикаже добијене резултате, што је изузетно значајно за млађе истраживаче.

После уопштеног прегледа садржаја ове обимне студије, изнећемо нека значајна водећа схватања и идеје, изложене поступке и доказе које садржи и подразумева свака методологија, као пут за утврђивање истине о резултатима.

У теоријском делу разматра се постмодерни приступ педагогији, који све више отвара питања за која др Гојков сматра да педагогија данас још нема праве одговоре. Педагогија се данас чешће и не зове својим именом него јој други, са стране, дају своје, како др Гојков каже, недоумишљене теорије и нове концепције које се инаугуришу под често нејасним насловима. Педагогији мењају чак и име. Тако Хајдер сматра да се педагогија не зове тако, већ наука о васпитању. У том правцу даље је отишао Сартров егзистенцијализам, који је водио радикалној скепси у односу на сваку могућност утемељења педагогије, истичући да се човек мора схватити као субјект чија је слобода потпуно неограничена. Кроз педагошко „треба“ била би, по Сартру, укинута човекова слобода, јер његовој егзистенцији не сме претходити никаква есенција.

Схватање о неограниченој слободи човека, не доводи у питање постојање само педагогије, већ и неких других друштвених наука. Човек живи међу људима и није могуће да има потпуно неограничену слободу. Тако схваћена слобода угрожава слободу других људи. Човек, као друштвено биће, има потребу да живи у некој, макар и најмањој људској заједници у којој је неопходан неки договор о заједничком животу (и неки „ред“).

Др Гојков сматра да је филозофија одмогла педагогији и да је на неки начин обесмислила, будући да се бави апсолутном слободом. Корак даље је и постмодерно наглашавање немоћи педагогије и филозофије. Педагогија се, како каже др Гојков, дистанцирала од филозофског мишљења и тиме је из руку испустила и појмове васпитања и образовања или их је редуковала. Педагогија је тако постала делатност која се усмерава на решавање текућих проблема. Стога, др Гојков настоји да део налаза њених вишегодишњих експлоративних истраживања сагледа са теоријских позиција теорије хаоса и теорије детерминистичког хаоса, као основа за проучавање даровитости и стварање стратегија за њихов развој.¹

Истраживање др Гојков било је посвећено карактеристикама околине (средине) која подстицајно делује на претварање потенцијала у перформансе (постигнућа). Циљ је био да се уоче оне, које би биле карактеристичне или једнако значајне за већи број субјеката (праћење 706 идентификованих даровитих). У праћењу даровитих, могле су се, како др Гојков каже, само натукнути могућности да се уоче фактори средине значајни за остварење потенцијала даровитих у постигнуће. Приступи овом истраживању нису могли да продру у специфичности ситуација сваког даровитог, па би се коришћена методологија, по мишљењу др Гојков, могла оценити као недовољна. Утисак је, по њеном мишљењу, да се помоћу теорије хаоса могу помињати и други налази, за које није било до краја јасних објашњења.

¹ О овим теоријама др Гојков детаљно је писала у својој књизи *Дидактика даровитих*, Вршац 2008.

Још увек има отворених питања, нејединствених ставова о схватањима и у дефинисању даровитости из чега се јављају остали проблеми. Међу бројним питањима је и питање о природи даровитости. То јест, да ли је даровитост урођена или није и који су докази и за једно и за друго схватање. Има аутора, на пример А. Ериксон, који одричу, или бар не признају значај урођених потенцијала човека. Пошто се претежно бавио прво вежбањем памћења, а затим вежбањем за постигнућима у неким ограниченим областима (атлетици, неким спортовима и музици), за њега је основни услов за постизање врхунских постигнућа здрав појединац, његова висина и телесна величина (оно што припада генетици). Посебним, намерним вежбањем од раног узраста и у дугом временском периоду (око десет година, а неки су израчунали око 100.000 часова вежбања), могуће је доћи до врхунских резултата.

Другачије схватање има Гање, који прави разлику између даровитости и талента. Под концептом даровитости Гање подразумева постојање и коришћење неувежбаних и спонтано изражених природних способности у најмање једној вештини до мере која појединца сврстава међу десет од сто најбољих појединаца његових година. Под талентом Гање означава изванредно савладавање и систематично развијање способности (или вештина) и знања у најмање једном пољу људских активности, до степена који појединца сврстава међу десет од сто најбољих из његовог годишта.

У својим разматрањима др Гојков је велику пажњу (и простор) поклонила схватањима Ериксона и сарадника. Основно питање које су они поставили је да ли постоје емпиријски докази да се подржи разлика између даровитости и постигнутог нивоа достигнућа? Ови аутори до сада (како кажу) нису нашли поуздане доказе за урођене препреке постизању елитних постигнућа код здравог појединца. Они су имали за циљ да утврде поуздане доказе за урођене препреке у постизању елитних достигнућа код здравог појединца. Имали су за циљ да утврде поуздане критеријуме који чине основ будуће науке о изузетној перформанси (постигнућу). Ериксон сматра да се дефиниција изузетног постигнућа заснива на друштвеним критеријумима (као што је мишљење експерата или општа јавност). Зато су се многи теоретичари усмерили на трагање за доказима о стваралачком супериорном постигнућу даровитих и да ли постоје емпиријски докази који подражавају разлику између даровитости и достигнутог нивоа достигнућа? Приступ експертске перформансе почиње идентификовањем стваралачког супериорног постигнућа, а онда иде уназад, како би објаснио развој механизма који су јој посредовали. Кључна улога у стицању повезаних психолошких адаптација и когнитивних умећа, који посредују нивоима експертских постигнућа, имају намерна вежбања, сматра Ериксон.

Схватање Ериксона и његових сарадника изазвало је велику дискусију у научним и стручним круговима. Гојков је изнела опсежан и детаљан приказ примедби, неслагања или контра-разлога. Да поменемо само неке: Фриман, Суботник, Гање, Рунко и др. Др Гојков каже да је можда најзначајнија препрека у прихватању става Ериксона и сарадника, њихово подразумевање да свако има

гене који су потребни за стицање високих постигнућа (експертиза) под условом да се бави намерним вежбањем које му одговара. Критикујући став Ериксона, Фриманова је изнела његову суштину речима: оно што се не може измерити као и да не постоји. Својим схватањима Ериксон, како сматра Рунко, „ноншалантно игнорише улогу креативности“. Рунко сматра да успех не може у потпуности да се схвати без познавања могуће или случајне улоге креативности. Ериксон и сарадници тврде да не постоје докази о томе да неки појединци имају урођену предност да достигну неки елитни ниво, или да ДНК ограничава достигнуће код здравих појединаца. Др Гојков презентира и схватање Лоренса, који сматра да се објашњење Ериксона и његових сарадника чини прикладним за теорију развоја у областима које су ограничене, мање апстрактне и интелектуалне, које имају комплексне рутине и пуно физичких компонената. Мало је доказа за области које немају краја као што су поезија, теоријска физика, архитектура, сликарство.

Неки аутори се усмеравају на даровитост као на потенцијал, други на важну улогу окружења и вежбања (Мајер), а неки на доказана постигнућа. Ериксон процењује да расправљање о тачној дефиницији даровитости и урођеном таленту и глобалним теоријама о структури даровитости, није донело неки напредак развоју науке о високим способностима или о супериорном постигнућу. Зато се усмерава ка приступу експертске перформансе (постигнућа) која би се усмерила на стваралачке доказе које би, било која теорија о даровитости, високим способностима, морала да објасни.

У вези са тим, намеће се питање критеријума доказа даровитости и високих нивоа постигнућа. Међу прве проблеме успостављања критеријума за доказе су друштвени критеријуми за експертизу. На рангирана постигнућа систематски утичу, по Ериксиновом мишљењу, неважни фактори као што су: пол, физичка привлачност и репутација извођача. Ово је нарочито значајно у неким областима као што је музика, неке спортске дисциплине, атлетика, тенис, скокови у воду и сл. Поменути фактори утичу и у неким научним областима. Стога, Ериксон предлаже да се процене достигнућа обављају без јавних извођења.

Експертски прилаз, какав предлаже Ериксон, вероватно је примерен приступ за неке активности. Међутим, поставља се неколико питања: шта је даровитост, како се она процењује, који су критеријуми за њено процењивање и други. Неопходно је да се пође од главног питања: шта је даровитост?

О даровитости постоје бројна и различита схватања и теорије, као и различите дефиниције. Многи аутори се слажу да је за идентификацију и процењивање даровитих и талентованих младих од велике важности да родитељи и васпитачи имају јасне концепције о природи и манифестацијама даровитости и талента. Даровитост и талент нису само резултати на тестовима и/или скалама за процењивање. Они су, како наглашава др Гојков, описи комплексних способности као интерактивних компоненти људског понашања који се развијају током живота даровитих појединаца, а најбитнији периоди су детињство и адолесценција.

Општа интелигенција је послужила као главна репрезентација интелектуалне способности током скоро целог XX века. Почевши од Бинеа (1902) у

Француској, Спирмана (1927) у Енглеској и Термана (1916) у САД, метафора интелигенције постала је видна психолошка конструкција, како каже др Гојков, која представља људско сазнање (когницију). Факторска анализа Терстона (1938) и Гилфорда (1967) почела је да идентификује компоненте или факторе интелигенције. Концепт опште интелигенције представљен је помоћу QI (квоцијент интелигенције) и још увек наставља да има утицаја на психологију и образовање. Појавила се и нова концепција људских способности која идентификује специфичне факторе интелигенције. Јавили су се и неспоразуми између дефиниција даровитости, интелигенције и талента. Разлози овог неспоразума, сматра др Гојков, углавном су методолошке природе. Истраживање и развој теорије Стерберга, Гарднера, Гањеа и других показују пут ка новим и бољим терминима и концепцијама супериорних способности.

У разматрањима различитих психолошких теорија видно је запостављена идеја и схватање о феномену креативности. Због методолошких проблема у проучавању даровитости, креативност је остала по страни вероватно због сложености овог феномена и тешкоћа у њеном проучавању и процењивању. Др Гојков је објаснила како су Терстон и Гилфорд унели креативност у домен интелигенције: Терстон са „флуидношћу“ и Гилфорд са дугим низом дивергентних фактора размишљања. На тај начин, феномен даровитости је целовитије објашњен, а дефиниције и схватања о даровитости су постале шире, потпуније, реалније и животије.

Треба нагласити да је др Гојков детаљно, јасно и прегледно приказала сву сложеност у теоријама и схватањима о способностима као и неслагања, супротстављања и уопште настојање научника да се нађе право значење, прави садржај и још значајније, примерена методологија за утврђивање даровитости и процењивање резултата и исхода.

За читаоце ће бити од интереса излагање др Гојков о процесу идентификације деце и талената. Овај процес често почиње са општим утврђивањем (мерењем) менталне способности, интелигенције или постигнућа, да би се одредио дечији општи ниво зрелости. Др Гојков при том наглашава да деца која се називају „даровитом“, нису супериорна у свим формама и областима способности. Свако од њих има јединствене шеме високих постигнућа, склоности или талената.

Идентификација даровитих представља сложен процес у дужем временском периоду како би могао да прати развојне промене и сазревање деце, нарочито у интелектуалној сфери. За идентификацију даровитих примењује се читав низ различитих инструмената о којима др Гојков, такође, пише врло детаљно приказујући њихов највећи број, као што су: Станфорд-Бинеова скала интелигенције, Торндајков тест, Векслерова скала интелигенције, тестови специфичних способности (Кауфмана), Пибоди сликовни тест речника, Развојни тест – Бејлијева скала развоја детета и други.

Идентификација по својој природи, треба да буде дијагностичка како би се идентификовале јаке стране, склоности и таленти. У садашње време, задатак

идентификације се помера са потраге за неколицином даровите деце на процене јаких страна, талената и вештина свих ученика.

Посебна пажња у овој студији поклоњена је идентификацији група које се разликују од оних које су до сада биле добро заступљене у истраживањима. Наиме, највећи број инструмената примењиваних за идентификацију способности (и даровитости) били су састављени за белу популацију и за средњу класу. На тај начин, у великом броју биле су запостављене мањине по различитом основу. Канадски психолог Ван Тасен Баска тврди да су мањине и материјално угрожени ученици најзапостављенији од свих подпопулација, а нарочито црнци, хиспанци, амерички Индијанци, хендикепирани и друге мањинске групе. Повећана је, такође, пажња идентификовању неостварених даровитих као и „скривених“ даровитих који, из различитих разлога, нису били у прилици да буду откривени и да покажу своје потенцијале.

У овој студији пребогатог садржаја и сазнања, треба да се помену још нека питања која заслужују пажњу читалаца. То је реализовани међународни пројекат у коме је учествовало 16 земаља и Србија. Пројекат носи наслов: „Пројекат о раној идентификацији даровите деце“ (Project for an early identification of gifted children – Huerta del Rey – Center specialized in the study of giftedness – Spain. Yolanda Benito-Jesus Moro.

Овај шпански пројекат прихватила је и Виша школа за образовање васпитача у Вршцу, а реализовао га је тим од 12 наставника ове школе и група васпитача предшколских установа. Пројектом је руководила др Гојков у току 1988–1989.²

После детаљног теоријског разматрања о овом питању, теоријски оквир овог истраживања је Рензулијева концепција талента, која дефинише даровитост као комбинацију високе интелигенције, посвећености задатку и креативности.

Циљ овог истраживања био је да се сазна обим у коме су одабране варијабле значајне и колико њих се може сматрати доказима за успешно откривање сваког даровитог детета на узрасту када едукациона импликација може да буде одлучујућа. Варијабле овог истраживања биле су: моторни развој детета (са 5 елемената); језички развој (са 7 елемената); когнитивни развој (са 17 елемената); самопомоћ (са 3 елемента); социјализација (са 3 елемента).

Поред испитивања деце, испитани су и њихови родитељи путем прецизног упитника о истим особеностима развоја које су утврђиване код њихове деце. Истраживачки тим је прихватио предлог васпитача, који раде са децом, да и они, на основу властитих запажања у ради са њима, предложе ону децу коју су они проценили као даровиту.

У закључку овог истраживања каже се: „Овај истраживачки рад обезбеђује веома једноставан метод процене за откривање даровите деце од веома раног узраста и тако доприноси одговарајућем прилагођавању образовања потребама те деце без обзира на њихово социјално порекло“.

² На основу овог пројекта објављена је студија под насловом: *Рана идентификација даровитости*, др Грозданка Гојков, мр Наташа Стурза-Милић, Александра Гојков-Рајић, Александар Стојановић.

У студији је изложен опширан теоријски део и укупни материјал овог пројекта како би се они, који су заинтересовани за проблеме предшколске деце, а посебно даровите, могли детаљно упознати са овим значајним међународним пројектом. Овај реализовани сложени пројекат може да послужи (младим) истраживачима и као образац за истраживање, јер је испунио све предвиђене захтеве какви се данас постављају у озбиљним истраживачким подухватима, а нарочито онима, који имају међународни карактер.

На крају може да се каже да је академик др Грозданка Гојков написала опсежну студију богатог и разумевајућег садржаја „*Методолошки проблеми истраживања даровитости*“.

Анализирајући неуобичајено велики број иностраних радова (884) из филозофије, педагогије и психологије, др Гојков је показала велико знање и обавештеност које је акумулирано дугогодишњим бављењем не само проблемима даровитости и креативности, већ и много шире.

Анализе теорија и схватања, међу којима има и оних које нису довољно или нису уопште познати у нас, показују велику упућеност аутора у савремено стање научног духа у свету. Др Гојков истовремено презентира проблеме који су актуелни и начине њиховог разматрања и истраживања.

Као неуморан истраживач, др Гојков је дубоко заинтересована за методологију истраживања, а посебно за њену примену у истраживањима у области даровитости и креативности.

Студија „*Методолошки проблеми истраживања даровитости*“ представља незаобилазни рад за све оне, који су заинтересовани за савремене проблеме филозофије, педагогије и психологије, или се њима баве и неисцрпни је извор за упознавање различитих теоријских и истраживачких сазнања (метода, техника и поступака).

Посебно треба истакнути импресивну библиографију у којој ће бројни теоретичари и истраживачи наћи обиље радова за властита теоријска проучавања и за различита истраживања.

На основу напред изложеног, топло препоручујем студију академика др Грозданке Гојков под насловом „*Методолошки проблеми истраживања даровитости*“ да буде објављена како би била доступна научној и стручној јавности.

**КАКО РОДИТЕЉИ МОГУ ДИСЦИПЛИНОВАТИ
СВОЈЕ ДЕТЕ, А ДА НЕ УПОТРЕБЕ БАТИНУ
ЛОВРИНЧЕВИЋ, НЕВЕНА (2009) :**
***Дисциплина без батина*, Београд: Креативни центар**

Приручник „Дисциплина без батина“ Невене Ловринчевић у издању Креативног центра, објављен у едицији Дobar родитељ, има 88 страна и састоји се из следећих 9 делова:

1. *Увод*
2. *Да ли је дисциплина потребна*
3. *Старе „добре“ методе*
4. *Зашто разговор не делује*
5. *Предуслови за добро дисциплиновање*
6. *Технике дисциплиновања на дуге стазе*
7. *Технике дисциплиновања на кратке стазе*
8. *Како је Вама?*
9. *Закључак*

У оквиру сваког од наведених делова налазе се добро структурисана и разрађена универзална питања и проблеми који чине јединствену целину. Истовремено су у форми дијалога дати могући конкретни одговори на актуелну проблемску ситуацију. На тај начин омогућено је јасније сагледавање, процена и разрешење ситуације којом се остварује дисциплина, поверење, уважавање и комуникација у оквиру односа родитељ – дете. Вештине и методе које приручник родитељима нуди омогућавају помоћ у учењу и усвајању прихватљивих облика понашања деце.

У *Уводу* ауторка крајње једноставним и приступачним начином саопштава читаоцу ситуације и чињенице везане за дисциплиновање деце упозоравајући да је дисциплиновање напорно, да се не може прескочити и да „уопште није пријатан део родитељства“.

Други део *Да ли је дисциплина потребна* говори о неопходности дисциплиновања деце као социјална бића која ће постати једног дана одрасле, одговорне, моралне, зреле личности. Наводе се, такође, суштинске разлике између онога што дисциплина није (кажњавање, непотребно фрустрирање детета, сувишан на-

пор, доказивање око тога ко је газда у кући, вентил, етикетирање са „добар“ и „лош“) и онога што дисциплина јесте (учење друштвено прихватљивих облика понашања, прилагођеност различитм срединама, емоционална стабилност, али и то да дете сноси последице сопственог понашања).

Трећи део *Старе „добре“ методе* обухвата три методе које су се примењивале док смо и сами одрастали (односи се на: батине, исмевање и понижавање, дистанцирање и ћутање), откривајући добре и лоше стране сваке методе појединачно, истовремено изводећи закључке о њиховој ефикасности.

Четврти део *Зашто разговор не делује* чине бројни примери примене разговора као непроцењиве вештине у односу родитељ – дете. Ауторка наводи ситуације када разговор постаје метода која је недовољно делотворна али указује да је никако не би требало одбацити, већ је користити пре и после дисциплиновања.

Пети део разматра добру повезаност са родитељем и понашање родитеља истичући да су то *предуслови за добро дисциплиновање*. Добру повезаност са родитељем могуће је остварити на више начина: ношењем бебе (чиме се задовољава њена потреба за сигурношћу и заштитом), играњем различитих игара са сопственим дететом и усмеравањем у тражењу адекватних решења у одређеним ситуацијама. Делотворност ових начина повезаности са родитељем резултира остварењем стабилних веза и емоционално стабилну личност. Адекватним понашањем родитеља омогућен је успех у дисциплиновању детета. У овом делу могу се наћи корисне информације о чему све треба повести рачуна пре, за време и после дисциплиновања детета.

Шести део бави се проблемом приступа васпитања и дисциплиновања детета наводећи да се лични пример и похвале убрајају у *технике дисциплиновања на дуге стазе*. Дете примењује оне обрасце понашања које уочава у својој породици. Са пожељним облицима понашања тесно је повезана похвала као најделотворнија, али не и довољно коришћена техника дисциплиновања детета.

Седми део посвећен је техникама које се примењују у ситуацијама када је важно постићи одмах резултат и отуда њихов назив *технике дисциплиновања на кратке стазе*. Зависно од стила васпитања родитеља, узраста детета и процене ефикасног деловања на санкционисање непожељних, уз истовремено подстицање и јављање пожељних облика понашања, ове технике могу се користити самостално или комбиновано. У оквиру приступа непожељно – пожељно понашање, указује се и на додатне технике, технике скретања пажње и 1,2,3!, које представљају учење последица оба облика понашања.

Осми део *Како је Вама?* посвећен је родитељима и садржи савете којима се они охрабрују у доследности приликом „утеривања детета у ред“ наглашавајући да тај процес може бити напоран, понекад непријатан. Дисциплиновање детета јесте делотворно само ако родитељи у тренуцима малодушности, исцрпљености и умора дозволе себи предах и опуштање јер ће после тога, сабраних мисли, бити у стању правовременог и контролисаног реаговања.

Девети део доноси *закључак* у којем се наглашава да се коришћењем наведених техника дисциплиновања може решити већина проблема, да напори који

се улажу не дају увек резултате али да то никако не би требало да обесхрабри. Не постоје савршени родитељи али могу постати најбољи и себи и детету само онда када теже доношењу и спровођењу одлуке за које верују да су најбоље.

Методе и технике које овај приручник нуди везане су безусловно за релативно нову филозофију односа родитељ – дете који свима нама помаже да успешније и демократичније живимо заједно и омогућава да се дисциплиновањем детета оно развије у зrelu, „емоционално стабилну личност са задовољавајућим пријатељским и партнерским везама“. Приручник је литература родитеља. Истовремено нам указује да је неопходан, али и да још није у потпуности практично прихваћен њен садржај. У том смислу, ауторка је самим насловом приручника указала да се дисциплиновање деце може остварити без употребе батина. Батина је израз педагошке немоћи, прогнана је из раја јер јој тамо није место па је стога непожељна и лоша. На крају, можда је најбоље завршити изјавом једне мајке која је рекла: „Не знам откуда је батина изашла, ал’ трудим се да у моју кућу не улази.“

САДРЖАЈ ЧАСОПИСА „ПЕДАГОШКА СТВАРНОСТ“ ЗА 2009. ГОДИНУ

	Бр.	Стр.
Академик Јован Ђорђевић: Креативност и имагинација деце и младих	1–2	5–18
Академик Душан М. Савићевић: Андрагошке потребе и могућности савремене школе	3–4	261–273
Академик Душан М. Савићевић: Особености студентске популације у високом образовању	5–6	453–467
Др Радован Грандић, Милена Летић: Животни стилови слободног времена младих у Србији	5–6	468–478
Академик Јован Ђорђевић: Индивидуализација и иновирање наставе и учења у школи 21. века	7–8	673–685
Др Жељко Калуђеровић: Хераклитова ватра	9–10	865–877

ПОГЛЕДИ И МИШЉЕЊА

Академик Душан М. Савићевић: Варвари високе технологије – наука и образовање	1–2	29–32
Др Слађана Зуковић: Функционалност савремене породице и верска настава као ресурс њеног оснаживања	1–2	33–47
Др Мирча Маран: Културне прилике код Румуна у Банату 1945–1952.	1–2	48–58
Др Жељко Калуђеровић: Аутономност Новосадске гимназије у креирању наставе филозофије у XIX и почетком XX века	1–2	59–72
Др Мирољуб Ивановић: Структурални морфолошки модел адолесцената	1–2	73–87
Мр Славица Марковић, др Шпела Голубовић, Данијела Лаловић: Проблеми у друштвеном понашању код лако ментално недовољно развијених ученика	3–4	274–283

Љиљана Грујић: Поглед на људске ресурсе у образовању из угла менаџмента људских ресурса	3–4	284–290
Мр Ивана Јанковић: Интерактивна радионица као модел рада у васпитно-образовној делатности музеја	3–4	291–304
Мр Мирјана Николић, Вероника Катрина-Митровић: Корак ка инклузији образовања	5–6	479–491
Др Јована Милутиновић: Класично образовање: теорија и пракса	7–8	686–699
Др Александра Вујић: Право припадника националних мањина на образовање у Војводини од 1974. до 2004. године	7–8	700–712
Др Зоран Аврамовић, Миља Вујачић: Однос наставника према даровитим ученицима	9–10	878–889
Виолета Петковић: Пут ка иновативном наставнику у основној школи	9–10	890–896

ВАСПИТНИ РАД ШКОЛЕ

Др Душан Ђорђевић: Превентива као одговор куративи и немоћном описивању агресије и вршњачке нетолеранције у школама	3–4	305–315
Спец. Мирјана Станковић-Ђорђевић: Вештина узајамног давања од срца – Ненасилна комуникација	3–4	316–331
Мр Снежана Товиловић, др Зденка Нововић, др Миклош Биро: Ставови према образовању, аспирације и вредности ромских и неромских родитеља чија деца полазе у школу	3–4	332–354
Горан Јоксимовић: Ђачка екскурзија – туризам или настава и учење	5–6	492–496
Мр Снежана Милошевић Јешић: Примена иновација у основној школи	5–6	497–524
Мр Јелена Максимовић: Различити облици предупређивања школског неуспеха	5–6	525–542
Отилиа Велишек-Брашко: Идентификација деце са потенцијалним специфичним тешкоћама у учењу приликом процене зрелости за полазак у школу	5–6	543–563

Мр Мила Бељански: Предлог програма превенције у области насиља међу вршњацима	7–8	713–734
ДИДАКТИКА И МЕТОДИКЕ		
Др Драгољуб Херцег, др Ђорђе Херцег: Скаларни производ и приближна интеграција	1–2	88– 102
Мр Татјана Глушац: Порватна информација као подстицај при учењу писања у средњошколској настави енглеског језика	1–2	103–114
Јагода Топалов, мр Биљана Радић-Бојанић: Емпатија у настави страног језика као последица глобализацијских токова	1–2	115–124
Милка Марковић: Творба речи у енглеском језику: африкација	1–2	125–130
Мр Мирјана Никлановић, др Томка Миљановић: Иновативни модели наставе биологије и заштита животне средине	1–2	131–140
Мр Љиљана Пижурица: Приказ дидактичких димензија активности ученика и наставника у моделу вишефронталне наставе	1–2	141–154
Др Зоран Аврамовић, Миља Вујачић: Наставници и промене у квалитету часа	3–4	355–367
Мр Марија Јовановић: Педагошка комуникација као фактор ефикасности наставе	3–4	368–382
Ивана Луковић: Одлике мишљења ученика на узрасту од 11. до 15. године	3–4	383–397
Мр Нада Џамић Шепа: Реформа наставних програма Биологије за основну школу у Србији, Хрватској и Словенији	5–6	564–587
Мр Јованка Терзић, др Томка Миљановић: Реализација програма биологије у гимназији и заступљеност мултимедија	7–8	735–744
Мирко Г. Нагл, др Душанка Ж. Обрадовић: Анализа резултата примене научног метода у настави физике	7–8	745–755

Ружица Вукобратовић: Интерпретација математичких садржаја и њихов исход	7–8	756–770
Мр Маринел Негру: Методолошки приступ у примени функционално-комуникативног принципа у настави румунског језика и књижевности	7–8	771–776
Др Драгослав Херцег, др Ђорђе Херцег: Интерполација и Geogebra	9–10	897–908
Мр Еуген Љајко, Златка Павличић, Ивана Радуловић: Геогebra у срењошколској настави аналитичке геометрије	9–10	909–920
Мр Антон Врдољак, др Милорад Бањанин: Образовни потенцијал програма за динамичку математику: случај Geogebra	9–10	921–931
Мр Наталија Будимски: Оригами – пример за примену у настави математике	9–10	932–943
Др Зорана Лужанин: Један поглед на квалитет универзитетске наставе	9–10	944–954
Др Миодраг Милићевић, мр Драгана Тодорић-Вукашин: Примена мултимедијалних алата у образовању	9–10	955–961
Мр Бранко Прентовић, др Драгослав Херцег: Анализа опште квадратне једначине применом рачунара	9–10	962–977
Светлана Малетин, Милош Рацковић: Рачунарске науке у основној и средњој школи у свету и код нас	9–10	978–990
Др Ђорђе Херцег: Џојстик у настави	9–10	991–999
Ђурђица Такач, Јасминка Радовановић: О визуелизацији изворне функције	9–10	1000–1006
Др Љиљана Петковић, др Миодраг Петковић: О погрешним називима познатих математичких резултата	9–10	1007–1017
Др Валерија Пинтер Крекић: Метода покушаја и погрешака у почетној настави математике	9–10	1018–1025
ПРЕДШКОЛСКО ВАСПИТАЊЕ И ОБРАЗОВАЊЕ		
Др Наташа Стурза Милић: Сагледавање моторичког развоја предшколске деце	1–2	155–168

Др Јасмина Клеменовић: Сарадња предшколске установе са породицом у припреми деце за полазак у школу	3–4	398–411
Др Станко Цвјетићанин, др Мирјана Сегединач: Садржаји о природи у програму предшколског васпитања и образовања	3–4	412–423
Спец. Лидија Мишкељин: Портфолио као начин подстицања самовредновања и самовођеног учења у образовању будућих васпитача предшколске деце	5–6	588–600
Софија Крајновић, Бранка Јовановић, Драгана Богићевић: „Дечја представа – процес, а не циљ“	5–6	601–606
Др Станко Цвјетићанин, др Мирјана Сегединач: Садржаји о биљкама и животињама у предшколском васпитању и образовању	7–8	777–789
Мр Драгана Малешевић: Тематско планирање и интеграција садржаја у припремном предшколском програму	7–8	790–802
Зорица Лаковић: Предшколска установа и друштвена средина – средина за развој и учење	7–8	803–812

ПСИХОЛОГИЈА

Др Аурел А. Божин: Развојна психологија: историјски осврт на једну базичну психолошку дисциплину	1–2	169–190
Мр Јелица Петровић: Стиливи превладавања аверзивних емоција у раној адолесценцији	1–2	191–205
Мр Александра Трогрлић, др Александар Васић: Конструкт и мерење потребе за сазнањем	5–6	607–621
Сања Грубор, мр Ивана Мићић, др Марија Зотовић, мр Јелица Петровић: Релација селф-концепта адолесцената и процењених васпитних стилова њихових родитеља	5–6	622–635
Др Жељка Бојанин, мр Младен Печујлија: Структура ставова према моралности и утицај пола на њу	5–6	636–648

ИЗ НАШЕ ПРАКСЕ

Милена Видановић: Савремени приступ настави у комбинованом одељењу	1–2	206–212
--	-----	---------

Јелена Павловић: Мале школе	1–2	213–227
Мр Зорица Шалјић: Радно васпитање у домовина за децу и младе без родитељског старања	5–6	649–656

ИЗ СТРАНИХ ЗЕМАЉА

Др Ђоко Г. Марковић: Један карактеристични примјер полиморфног рјешавања конструктивног задатка у настави математике средње школе	1–2	228–234
Мр Ивица Станић: Трач и оговарање – од забаве до клевете	1–2	235–256
Мр Хазим Селимовић, Зехрина Селимовић: Како родитељи подстичу компетенције код своје дјеце	3–4	424–439
Илда Хозић: Инклузија за све	3–4	440–445
Др А. А. Вербицкиј, мр О. Б. Јермакова: Школа контекстног прилаза у општем образовању	5–6	657–667
Др Ненад Сузић, мр Јадранка Граонић: Синдром изгарања у професији наставника	7–8	813–826
Др Тамара Прибишев Белеслин: Развој предшколске деце и компјутери	7–8	827–835
Мр Хазим Селимовић, Зехрина Селимовић: Развој компетенција код дјеце родитељском инструкцијом	7–8	836–849

ОЦЕНЕ И ПРИКАЗИ

Академик Младен Вилотијевић: Обогаћена дидактичка мисао	7–8	850–853
Др Оливера Гајић: Басне лектира мудрости	7–8	854–856
Мр Александра Гојков Рајић: Даровити и друштвена елита	7–8	857–860
Академик Босиљка Ђорђевић: Методолошки проблеми истраживања даровитости	9–10	1026–1033
Љиљана Грујић: Како родитељи могу дисциплиновати своје дете, а да не употребе батину	9–10	1034–1036

IN MEMORIAM

Златибор Петровић (1921–2009)	3–4	446–447
-------------------------------	-----	---------